Estadística y probabilidad

Reflexiones e ideas para trabajar con estudiantes de educación primaria[*]

Miguel Ángel Mirás Calvo y Estela Sánchez Rodríguez[**]

Mayo, 2016

Resumen

En este informe resumimos aquellas nociones básicas de estadística y cálculo de probabilidades que, a nuestro juicio, sería aconsejable que conociesen los alumnos de los últimos cursos de educación primaria. Muchos de estos conceptos no son manejados ni siquiera por los alumnos que se incorporan a los estudios de grado universitarios, dado que en la ESO no es obligatorio cursar asignaturas con contenidos de estadística. Esta merma en la formación de los estudiantes, y la consecuente escasa intuición que desarrollan en el cálculo de probabilidades, les obliga a duplicar sus esfuerzos para alcanzar un nivel aceptable cuando, tarde o temprano, han de afrontar el estudio de la estadística. Habitualmente, se justifica el "descuido" en la enseñanza de la estadística ("la gran olvidada") en las primeras etapas formativas apelando a que en los programas educativos figura siempre en los últimos temas, aquellos que, por premura de tiempo, casi nunca se abordan al final del curso. Sin embargo, muchas ideas y conceptos básicos en estadística y probabilidad pueden introducirse en la educación primaria mediante juegos, actividades y trabajos en grupo, que pueden llevarse a cabo en cualquier momento y, ciertamente, en perfecta armonía con otros contenidos de los programas docentes. Nuestro objetivo es proponer algunas de estas tareas junto con los conceptos que, de forma sencilla e intuitiva, ayudarían a su aprendizaje. Posteriormente, estas ideas se pueden afianzar en la educación secundaria y profundizar en el bachillerato. Los contenidos de este informe también podrían utilizarse como parte de un curso de nivelación en estadística y cálculo de probabilidades, previo al acceso a la universidad.

Palabras clave: Estadística, probabilidad, combinatoria, operadores lógicos

1. Introducción

Los contenidos de este informe serán ilustrados con ejemplos que pueden ser directamente aplicados en el aula. Naturalmente estos ejemplos pueden ser sustituidos o complementados por otros distintos de los que aquí presentamos. Algunos de ellos están basados directamente en los contenidos de las charlas divulgativas que dimos en el colegio CEIP de Rebordáns con motivo de la Semana de las Matemáticas.

[*] Dirigido fundamentalmente a 5º y 6º de primaria. Elaborado por sugerencia de la dirección del CEIP de Rebordáns (Tuy) a quién agradecemos su interés y colaboración.

[**] Departamento de Matemáticas y Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Vigo, mmiras@uvigo.es y esanchez@uvigo.es.

En la Sección 2 recordamos nociones básicas de combinatoria, haciendo hincapié en el principio multiplicativo y en el uso de diagramas en forma de árbol que ayudan a entender el proceso de razonamiento que está detrás de muchos problemas. La enumeración ordenada y sistemática es fundamental para poder comprender conceptos matemáticos más complejos, por ejemplo, el factorial de un número.

En la Sección 3, dedicada a la estadística, se insiste en la importancia de entender el concepto de frecuencia, esencial para el cálculo de probabilidades. Para ello es fundamental que el alumno elabore sus propias bases de datos, efectuando trabajo de campo consistente en la recogida de información de interés. La creación de gráficos y la interpretación atendiendo a su forma sirve para desarrollar la intuición en este ámbito, lo que repercutirá en una mejor comprensión de las principales medidas de posición y dispersión.

Una vez dominado el concepto de frecuencia estamos en disposición de abordar en la Sección 4 el cálculo de porcentajes y probabilidades. Distintos experimentos aleatorios sencillos, como el lanzamiento de una moneda o de un dado, se pueden utilizar para comprender los principios básicos. Sin embargo, es necesario un esfuerzo adicional para transmitir que la aleatoriedad va más allá de los meros juegos de azar y que está presente en muchas facetas de la vida cotidiana. Comprender mejor los fundamentos del azar repercutirá en un mejor entendimiento de nuestro entorno y nuestra forma de relacionarnos con él.

Por último, en la Sección 5, recordamos lo importante que es comprender los principales operadores lógicos que, si bien, puede parecer que son competencia propia del lenguaje, se pueden y se deben desarrollar también como parte del lenguaje matemático. Los diagramas de Venn ayudan a entender negaciones, conjunciones y disyunciones. El operador condicional debe trabajarse con detenimiento, en particular la equivalencia entre $(a \Rightarrow b)$ y $(no\ b \Rightarrow no\ a)$, siendo a y b dos proposiciones cualesquiera. Conviene también ejercitar los símbolos entre conjuntos y entre números como parte de la propia escritura en términos matemáticos. Se puede practicar la escritura de letras del alfabeto griego, que se utilizan con frecuencia en Estadística (y en otras disciplinas como la Física o la Química), para denotar determinadas magnitudes, dado que muchos alumnos (ya en edad adulta) no son capaces de escribirlas.

2. Nociones básicas de combinatoria

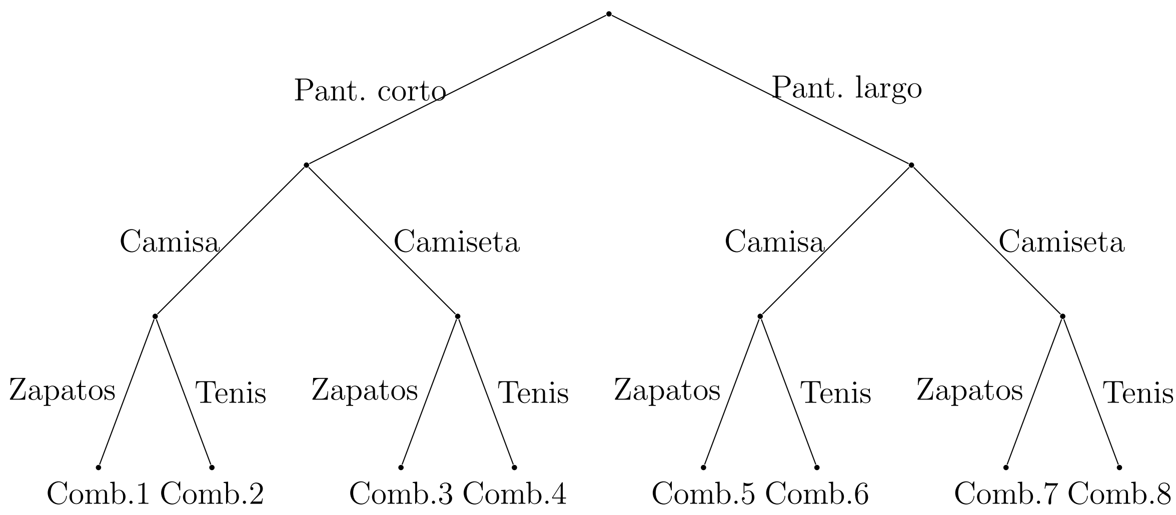
En esta sección trabajaremos con el principio multiplicativo, los diagramas de árbol, la combinatoria básica y la enumeración ordenada.

Principio multiplicativo

Supongamos que estamos decidiendo sobre cómo vestirnos por la mañana y disponemos de las siguientes prendas: un pantalón corto y un pantalón largo, una camisa y una camiseta, unos zapatos y unos tenis. ¿De cuántas formas distintas podemos vestirnos si vamos a elegir una prenda de cada clase? En nuestro caso, las posibles combinaciones son:

$$2 \text{ pantalones} \times 2 \text{ prendas superiores} \times 2 \text{ calzados} = 8 \text{ posibilidades (o combinaciones).}$$

Fijémonos en que por cada pantalón me puedo poner o una camisa o una camiseta, y por cada combinación de las anteriores (pantalón + camisa) me puedo poner zapatos o tenis. Por lo tanto hay 8 posibilidades diferentes. Veamos el diagrama en árbol correspondiente a esta situación:



Otros ejemplos:

1. Si nuestro vestuario consta de 5 pantalones, 7 camisetas y 3 gorras. ¿De cuántas formas distintas podemos vestirnos eligiendo siempre una prenda de cada tipo? Elabora el diagrama en árbol.
2. En un restaurante ofrecen 3 primeros platos, 5 segundos y 2 postres. ¿Cuántos menús distintos se pueden formar? Elabora el diagrama en árbol.
3. Las matrículas de los coches están formadas por 3 letras y 4 números. Si consideramos 26 letras y 10 cifras $(0, 1, 2, \ldots, 9)$. ¿Cuántas placas distintas se pueden hacer?
4. ¿Cuantos números distintos de 8 cifras se pueden escribir en el sistema binario? Cada número de este tipo es un byte de información. Luego un megabyte son un millón de bytes. Calcula aproximadamente los bytes de información que hay en un libro de Gerónimo Stilton.

Combinatoria básica

Imaginemos que tenemos que realizar tres tareas (A, B, C) sin importarnos el orden en que las hagamos. ¿De cuántas formas distintas podemos hacerlas? Enumeremos las posibilidades. Primero colocaremos los casos en que se realiza la tarea A en primer lugar, luego los casos en que es B la primera tarea en ser realizada y, finalmente, los casos en los que C se realiza primero:

1. ABC
2. ACB
3. BAC
4. BCA
5. CAB
6. CBA

Hay un total de 6 posibilidades. Para contarlas más rápidamente, podemos pensar de la siguiente forma. Tenemos 3 posibilidades para realizar la primera tarea (colocar en el primer lugar A, B o C). Una vez elegida la primera tarea, para colocar la segunda tarea ya sólo tenemos 2 posibilidades, es decir, hay 2 tareas con la A en primera posición, dos con la B primera y otras dos con la C en primera posición: en total $3 \times 2 = 6$ posibilidades. Una vez colocadas dos tareas, la última ya queda determinada. Por tanto, podríamos escribir que las posibilidades son:

$$3 \times 2 \times 1 = 6.$$

El número obtenido al multiplicar el 3 por todos los números menores que él se llama 3 factorial y se escribe $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$. Elabora el diagrama de árbol correspondiente a esta situación.

Otros ejemplos:

1. ¿Cuántas formas distintas hay de realizar 4 tareas (A, B, C, D)? Enumera todas las posibilidades.
2. ¿De cuántas formas distintas podemos sentar a los niños de una clase que tiene 12 alumnos?
3. ¿Cuántos cifrados monoalfabéticos distintos se pueden hacer con las 27 letras del alfabeto? (Es un número muy, muy grande)

Supongamos ahora que tenemos una clase con tan sólo 4 niños, llamémosles A, B, C y D, y queremos formar grupos de distintos tamaños. ¿Cuántos grupos distintos de un único niño podemos formar? Claramente 4, cada niño en un grupo unitario distinto:

$$\{A\} \qquad \{B\} \qquad \{C\} \qquad \{D\}$$

¿Cuántos grupos distintos podemos formar de 2 niños? Vamos a enumerar las posibilidades de forma ordenada para no olvidarnos de ninguna.

$$\{A, B\} \qquad \{A, C\} \qquad \{A, D\} \qquad \{B, C\} \qquad \{B, D\} \qquad \{C, D\}$$

Se pueden formar 6 grupos distintos de 2 niños. ¿Cuántos grupos distintos podemos formar de 3 niños?

$$\{A, B, C\} \qquad \{A, B, D\} \qquad \{A, C, D\} \qquad \{B, C, D\}$$

Ahora hay sólo 4 posibles grupos. Es fácil también observar que tiene que haber los mismos grupos de 3 niños que de 1, dado que a cada grupo de 1 le podemos asociar un grupo de 3, el de los niños que quedan. Finalmente, sólo se puede formar un grupo de 4 niños, el que los incluye a todos: $\{A, B, C, D\}$.

Fila 0:	1
Fila 1:	1 1
Fila 2:	1 2 1
Fila 3:	1 3 3 1
Fila 4:	1 4 6 4 1
Fila 5:	1 5 10 10 5 1
Fila 6:	1 6 15 20 15 6 1
Fila 7:	1 7 21 35 35 21 7 1
Fila 8:	1 8 28 56 70 56 28 8 1

Figura 1: Triángulo de Pascal

Podemos utilizar el triángulo de Pascal para conocer el número de grupos con un determinado número de individuos (digamos m) que se pueden formar en un conjunto de (pongamos n) personas (ver Figura 1). Así, en el ejemplo anterior, en el que $n = 4$, buscamos la correspondiente fila del triángulo[1]: el primer valor a la izquierda nos indica los grupos de $m = 0$ individuos (el conjunto vacío); el siguiente valor, el número de grupos de $m = 1$ individuos; el tercer valor, 6, es el número de grupos de 3 elementos; el cuarto es el número de grupos de 3 elementos; y, por último, el quinto valor es el número de grupos de 4 elementos.

Los números que forman el triángulo de Pascal se llaman números combinatorios. Se identifican por su posición en el triángulo. El número combinatorio de la fila n que ocupa la posición m se escribe como $\binom{n}{m}$ y se lee n sobre m. Por ejemplo, el número combinatorio seis sobre cuatro es igual a quince, $\binom{6}{4} = 15$. Los números combinatorios tienen muchas propiedades que resultan muy llamativas y que son relativamente fáciles de comprender con ayuda del triángulo de Pascal.

1. Los números que ocupan los laterales del triángulo de Pascal son siempre unos. Es decir, todos los números combinatorios de las formas $\binom{n}{0}$ y $\binom{n}{n}$ valen 1. Son los grupos de 0 elementos (el grupo vacío) y de n elementos (el grupo total) que se pueden formar.

2. Cada número "interior" del triángulo (los números distintos de 1) se obtiene sumando los dos números que están justo encima en la fila superior. Matemáticamente, $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$.

3. El triángulo es simétrico. En cada fila n, los números que ocupan posiciones p y q tales que $p + q = n$ son iguales. Es decir, $\binom{n}{m} = \binom{n}{m-n}$.

4. La suma de los números de cada fila del triángulo es una potencia de dos. De hecho, los números combinatorios de la fila n suman exactamente 2^n, que se corresponde con el número total de grupos (subconjuntos) que se pueden hacer con n elementos (contando el grupo vacío). Así, por ejemplo, con 5 elementos se pueden formar $2^5 = 32$ grupos (subconjuntos) distintos.

5. Los números combinatorios están relacionados con los factoriales. De hecho, $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Por ejemplo,

$$10 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1)}$$

Como ejercicio podemos construir el triángulo para valores más grandes de n e investigar nuevas propiedades del mismo. Los números combinatorios aparecen, por ejemplo, en el desarrollo del denominado binomio de Newton, la expresión de la potencia n de la suma de dos números a y b, $(a + b)^n$, que algunos alumnos verán en el instituto.

3. Estadística

En esta sección analizaremos aspectos relacionados con la recogida, representación gráfica y análisis de datos estadísticos.

Tipos de variables

Queremos realizar un análisis estadístico de una población de individuos, por ejemplo, los estudiantes del CEIP de Rebordáns. Por ello, en primer lugar, tendremos que recopilar la información de las magnitudes o características que estamos interesados en conocer de cada individuo. En nuestro caso, podríamos estar interesados en estudiar el sexo, el curso, la altura, el peso, la envergadura, el color de los ojos, el color del pelo, el número de hermanos o la calificación en una materia de los estudiantes. Es fácil observar que las variables consideradas son de distinta naturaleza. Conviene por lo tanto establecer una clasificación. Fundamentalmente se dividen en dos categorías:

[1] El vértice del triángulo superior, el primer número 1, es el número de grupos de 0 elementos, que se corresponde con el conjunto vacío.

- **Cualitativas, categóricas o atributos**. Expresan una cualidad.
    - Sexo (niña o niño)
    - Curso (1^o EP, 2^oEP, ..., 6^oEP).
    - Color del pelo (rubio, moreno, castaño)
    - Color de los ojos (marrones, azules, verdes, negros)

  Las variables cualitativas a su vez pueden ser nominales u ordinales. En estas últimas existe un criterio objetivo que ordena sus diferentes clases, por ejemplo, el curso. Por el contrario, el sexo, el color del pelo o de los ojos, son variables cualitativas nominales, que podríamos ordenar pero de manera subjetiva atendiendo a nuestras preferencias.

- **Cuantitativas o numéricas**. Toman valores numéricos.
    - Número de hermanos
    - Altura
    - Peso
    - Envergadura
    - Calificación en una materia

Ejercicios

1. Definir variables de interés, clasificarlas y recoger datos de todos los alumnos del colegio para su posterior estudio.

2. Diseñar una recogida de datos sobre árboles del patio. Definir las variables de interés, clasificarlas para su posterior estudio.

3. Una fuente inagotable de información estadística son los deportes. En la mayoría se manejan porcentajes de todo tipo: porcentajes de aciertos en tiros libres y de triples en baloncesto, de primeros servicios en tenis, de tiros a portería en el fútbol, etc. Trabajar con este tipo de información puede resultar muy atractivo para los estudiantes.

Elaboración de tablas de frecuencias

Supongamos que, durante un mes, clasificamos el tiempo que ha hecho cada día en soleado, nuboso o lluvioso. Tras efectuar el correspondiente recuento obtuvimos que en 15 días el tiempo fue soleado, en 5 fue nuboso y en 10 fue lluvioso. La correspondiente tabla de frecuencias (absolutas) es la siguiente:

Tiempo	**Frecuencia**
Soleado	15
Nuboso	5
Lluvioso	10

Las frecuencias relativas se obtienen dividiendo la frecuencia absoluta entre el número total de observaciones (en este caso, 30). Los porcentajes se obtienen multiplicando las frecuencias relativas por 1004. Veamos la tabla completa en la que se puede comprobar que la suma de todas las frecuencias relativas es 1 y la suma de todos los porcentajes es 100.

Tiempo	Frecuencia	Frecuencia relativa	Porcentaje (%)
Soleado	15	0.5	50
Nuboso	5	0.166	16.6
Lluvioso	10	0.333	33.3

Gráfico de barras y de sectores

Se utilizan para representar variables cualitativas, sean éstas nominales u ordinales. Se separan las barras entre sí para indicar que se trata de variables cualitativas. Las alturas de las barras son las correspondientes frecuencias absolutas, relativas o porcentajes, dependiendo de la escala que queramos utilizar (lo importante no son las alturas, sino la relación entre las distintas barras, por ello es indiferente la escala que elijamos). Distintos diseños permiten poner las barras en horizontal o en vertical (ver Figura 2). Para los gráficos de sectores es necesario calcular los porcentajes que representa cada clase. Se pueden presentar distintos diseños (plano o 3D, ver Figura 3).

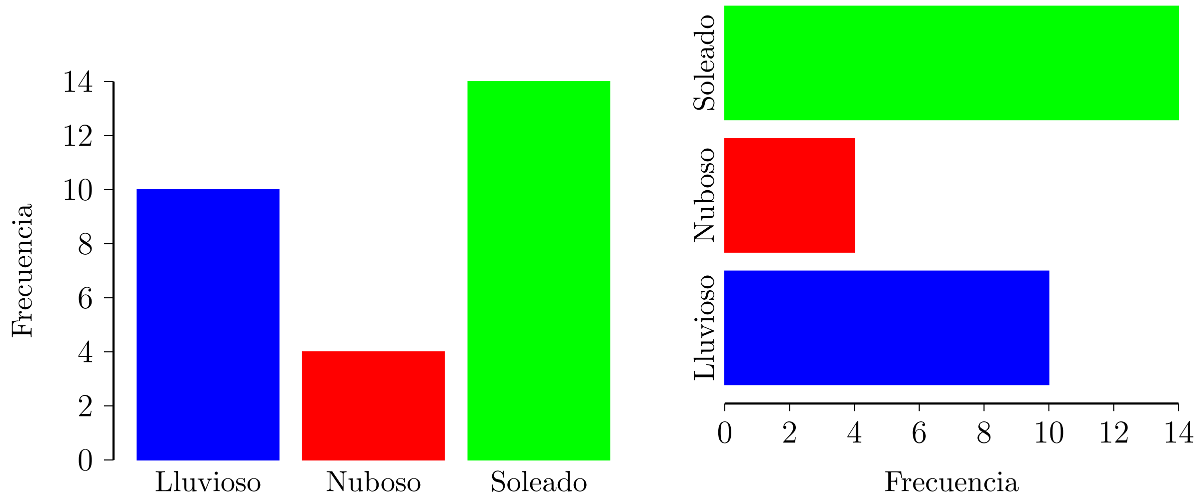


Figura 2: Gráfico de barras en vertical (izquierda) y en horizontal (derecha)

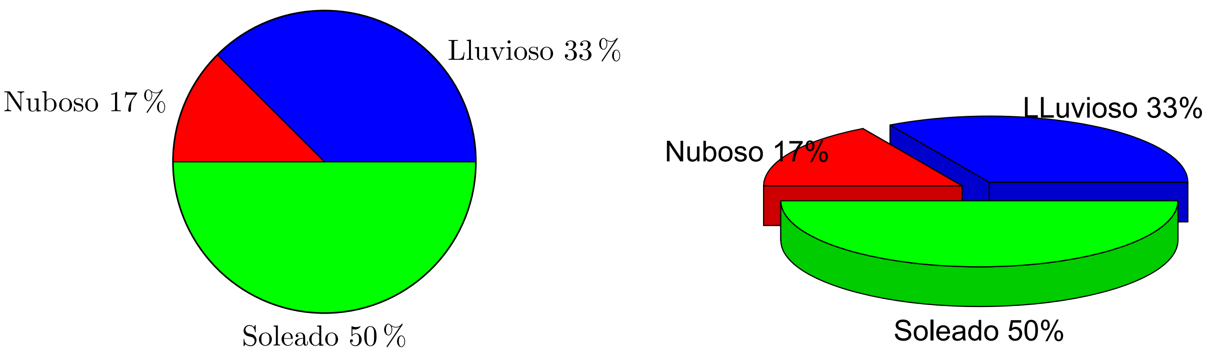


Figura 3: Gráfico de sectores (plano) y en 3D (derecha)

Histogramas

Los histogramas son una generalización de los diagramas de barras, en los que las barras aparecen unidas, dado que la variable representada es continua. El principio que los rige es que las áreas de las barras tienen que ser proporcionales a las frecuencias. El rango de la variable continua se divide en intervalos, habitualmente de la misma amplitud. Veamos un ejemplo concreto. Se mide la temperatura en el CEIP de Rebordáns a las 12 del mediodía durante un mes obteniendo los siguientes registros:

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Temperatura	22	21	23	21	24	26	23	23	27	28	26	24	28	26	23
Día	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Temperatura	18	17	21	23	19	19	16	17	16	17	16	16	17	16	19

Primero decidimos agrupar la variable en intervalos. En este caso hemos elegido intervalos de amplitud 2ºC. Ahora contamos el número de días cuya temperatura está en cada intervalo, las llamadas frecuencias absolutas. También calculamos las correspondientes frecuencias relativas: el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos.

Intervalo	16 a 18	18 a 20	20 a 22	22 a 24	24 a 26	26 a 28
Frecuencia absoluta	10	3	4	7	3	3
Frecuencia relativa	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

Dibujamos el gráfico de las frecuencias absolutas. Observamos (ver Figura 4) que la mayor parte de los días la temperatura estuvo entre 16 y 18 ºC. De igual forma podemos representar el histograma con las frecuencias relativas. En este caso, no es la altura de la barra la que determina la frecuencia relativa sino que ésta vienen dada por el área de cada rectángulo. Luego, la suma de las áreas de todos los rectángulos ha de ser igual a uno. Como hemos tomado intervalos de longitud 2 unidades, para que el área de cada uno sea igual a la frecuencia relativa, la altura ha de ser la mitad de dicha frecuencia (ver Figura 4). Comparando los diagramas de las frecuencias absolutas y relativas observamos que la escala del eje vertical ha variado pero la representación gráfica es exactamente la misma.

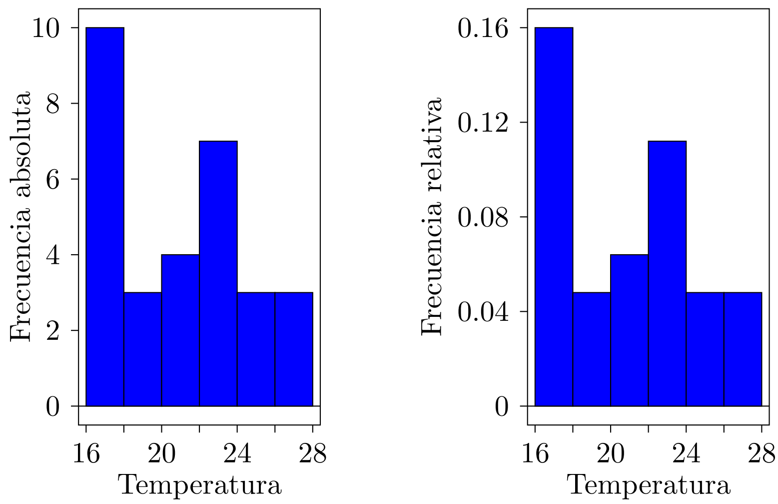


Figura 4: Histogramas de las frecuencias absolutas (izquierda) y las frecuencias relativas (derecha)

Otros ejemplos

1. Realiza las representaciones gráficas adecuadas para las tablas de frecuencias elaboradas previamente: por sexo, curso, color de pelo, color de los ojos y número de hermanos de los alumnos del CEIP de Rebordáns.

2. Elige una página de un libro que estés leyendo, cuenta las letras que aparecen y elabora la tabla de frecuencia. Representa gráficamente la información obtenida.

3. Construye los histogramas correspondientes a las variables altura, peso y envergadura de los alumnos del CEIP de Rebordáns.

4. Realiza representaciones gráficas para las tablas de frecuencias de los árboles y arbustos del patio del colegio.

Principales medidas resumen

Las medidas son útiles para obtener información rápida sobre un conjunto de datos. Es de interés tener valores centrales resumen (como la media, la mediana y la moda).

- La **media** es adecuada si los datos son cuantitativos. Se calcula sumando todos los datos y dividiendo entre el número total de datos. Por ejemplo, se puede calcular la temperatura media del ejemplo anterior, la altura media de los alumnos del colegio, el peso medio, la envergadura media,...

  La media de las temperaturas del ejemplo anterior sería:

$$\text{Media} = \frac{22 + 21 + 23 + 21 + 24 + 26 + \ldots + 19}{30} = 21.07 \ \ {}^{\circ}\text{C}.$$

- La **moda** se puede calcular para cualquier tipo de datos. Es de especial interés si los datos son cualitativos, dado que entonces no se puede calcular la media. La moda es el dato que aparece con mayor frecuencia, el que más se da o el que más se repite. En la tabla de frecuencias de los tiempos atmosféricos clasificados en soleado, nuboso y lluvioso, diríamos que la moda es *día soleado* (también podemos observar que la moda se alcanza en la barra de mayor altura si miramos el gráfico de barras o el histograma).

- La **mediana** se puede calcular para todos aquellos datos que pueden ser ordenados (variables cuantitativas y cualitativas ordinales). Se trata de encontrar el valor que está en el medio, en el sentido de que la mitad de los datos sean menores que ese valor y la otra mitad mayores que ese valor.

  Si ordenamos los datos del ejemplo de las temperaturas anterior, observamos que la temperatura de 21ºC es el valor central[2], lo que significa que la mitad de los días en ese mes tuvimos una temperatura inferior o igual a 21ºC y la otra mitad de los días la temperatura fue superior o igual a 21ºC. La propiedad se manifiesta claramente si ordenamos de menor a mayor los datos:

  16 16 16 16 16 17 17 17 17 18 19 19 19 21 **21 21** 22 23 23 23 23 23 24 24 26 26 26 27 28 28

  Observamos que la temperatura mínima fue de 16ºC y la máxima de 28ºC. Hay dos datos centrales que se corresponden con las posiciones 15 y 16 en los que la temperatura fue de 21ºC. Por tanto la temperatura mediana es 21ºC, lo que significa que el 50 % de los días la temperatura fue inferior o igual a 21ºC y el 50 % restante fue superior o igual a 21ºC.

Otros ejemplos

[2] En este caso como hay un número par de días, hay dos datos centrales (que en este caso son igual a 21ºC). Para obtener la mediana se promedian estos dos datos. Si el número de datos fuese impar, como por ejemplo en un mes de 31 días, sólo hay un dato central, que se corresponde directamente con la mediana.

1. Calcula medidas resumen de las variables consideradas en el CEIP de Rebordáns.
2. Repite el estudio anterior por cursos.
3. Calcula medidas resumen de las variables consideradas en el estudio de la vegetación del patio del CEIP de Rebordáns.

Introducción al concepto de variabilidad

Para cualquier variable cuantitativa es importante medir la variabilidad que tiene el conjunto de datos. Veámoslo en un ejemplo: consideremos las alturas (en metros) de 5 alumnos de cuarto y 5 alumnos de quinto curso.

Alumnos cuarto curso	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
Alumnos quinto curso	1.30	1.70	1.3	1.7	1.5

La variabilidad para los alumnos de cuarto curso es nula, dado que todos son igual de altos, no hay diferencias entre ellos; sin embargo sí que hay variabilidad entre los alumnos de quinto curso, unos son más bajos y otros son más altos.

Como primera aproximación de la variabilidad de un conjunto de datos calculamos el **rango**: la diferencia entre el valor máximo de la variable y el valor mínimo. En nuestro ejemplo, el rango valdría 0 para los alumnos de cuarto curso y valdría $1.7 - 1.3 = 0.4$ para los alumnos de quinto curso.

Otros ejemplos

1. Calcula la variabilidad (rango) para las variables cuantitativas de los ejemplos anteriores.
2. Calcula la variabilidad de la altura en los distintos cursos del CEIP de Rebordáns, indicando qué cursos tienen más variabilidad.

Introducción a las medidas de forma

Atendiendo a la forma del gráfico de barras o histograma podemos dar nueva información del conjunto de datos. Por ejemplo, consideremos los siguientes histogramas de la variable temperatura en distintos meses.

Observando la forma de la gráfica podemos extraer algunas conclusiones de interés:

- En el mes de Abril hay más uniformidad de temperaturas, es decir la temperatura se ha mantenido equilibrada en el período considerado.
- En Agosto la gráfica es más simétrica. La temperatura más frecuente está entre 25 y 30 grados (moda). Hay, más o menos, el mismo número de días en los que la temperatura está por debajo y por encima de la moda. Se dice que la gráfica tiene forma de campana de Gauss. Intuitivamente esto significa que muy pocos días han tenido temperaturas muy bajas (barras de la izquierda) y muy pocos días han tenido temperaturas muy altas (barras de la derecha). En la mayor parte de los días la temperatura se desvía poco de los valores centrales.
- En Enero la mayor parte de los días hubo temperaturas bajas, disminuyendo progresivamente el número de días en los que las temperaturas fueron en ascenso. Se dice que la gráfica no es simétrica y existe asimetría hacia la derecha.
- En Julio, el comportamiento es casi opuesto al de Enero, la mayor parte de los días hubo temperaturas altas, disminuyendo progresivamente el número de días en los que las temperaturas fueron en descenso. Se dice que la gráfica no es simétrica y presenta asimetría hacia la izquierda.

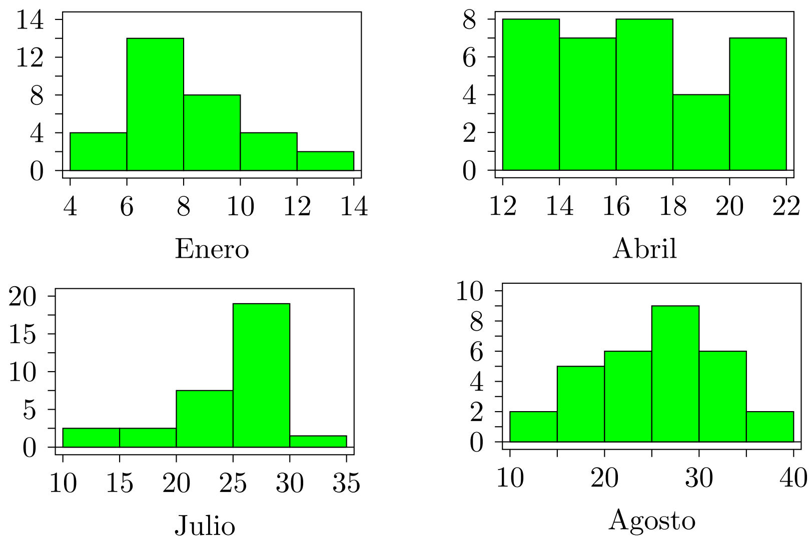


Figura 5: Histogramas de la temperatura de cuatro meses

Otros ejemplos

1. Interpreta la forma de las representaciones gráficas de las distintas variables analizadas en los ejemplos previos.

4. Probabilidad

En esta sección recordaremos los conceptos de suceso, suceso complementario y probabilidad así como la fórmula de Laplace.

Experimentos aleatorios y probabilidad

Vivimos rodeados de aleatoriedad, por ello es de interés tratar de modelar matemáticamente los fenómenos aleatorios para comprenderlos mejor. Son experimentos aleatorios el lanzar una moneda y observar si sale cara o cruz, lanzar un dado y ver que número sale, el chutar a una portería y observar si metimos gol o no. Pero los fenómenos aleatorios también surgen en biología, medicina, química, ingeniería,... El número de individuos que contraen la gripe en un día, el tiempo de supervivencia de un enfermo de una cierta enfermedad, el peso de un recién nacido, el tiempo de reacción ante un estímulo auditivo son ejemplos de este tipo de procesos. En definitiva, podemos decir que un experimento es aleatorio si conocemos todos los posibles resultados que pueden darse pero cada vez que lo llevemos a cabo no podemos anticipar con certeza cuál va a ser el resultado en esa realización particular.

Un suceso es todo aquello relacionado con un experimento aleatorio que se pueda medir. Por ejemplo, en el caso del lanzamiento del dado, podemos estar interesados en el porcentaje de veces que nos saldrá el número 4. En el caso de la portería, nos interesaría medir el porcentaje de efectividad en tiros rasos, por la escuadra,... la teoría de la probabilidad asigna a cada suceso un número (un porcentaje) que mide la posibilidad de que ese suceso determinado ocurra. Dado un suceso A, la conocida fórmula de Laplace expresa que la probabilidad de un suceso se calcula dividiendo el número de casos favorables al suceso en cuestión entre el número de casos posibles,

$$\text{Probabilidad}(A) = \frac{\text{casos favorables a } A}{\text{casos posibles}}.$$

Apliquemos esta fórmula a un ejemplo. Consideremos el sencillo experimento aleatorio de lanzamiento de un dado equilibrado de seis caras. Entonces, el conjunto de todos los posibles resultados es $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Para calcular la probabilidad del suceso $A = \{\text{salir impar}\} = \{1, 3, 5\}$, calculamos los casos posibles (que son 6), y los favorables al suceso A (que son 3). Por tanto, la probabilidad de que en el lanzamiento de un dado salga un número impar es de $\frac{3}{6} = 0.5 = 50\,\%$. Lo que significa que, si seguimos lanzando el dado muchas veces, es de esperar que el 50 % de las tiradas salga un número impar. Consideremos ahora el suceso $B = \{\text{sale un número mayor que } 4\} = \{5, 6\}$. La probabilidad del suceso B es $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Lo que significa que, si seguimos jugando es de esperar que el 33 % de las tiradas salga un número superior a 4.

- ¿Cuál es el suceso unión, $A \cup B$?

  $A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$. La probabilidad del suceso unión es $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Representa los diagramas de Venn correspondientes.

- ¿Cuál es el suceso intersección, $A \cap B$?

  $A \cap B = \{6\}$. La probabilidad del suceso intersección es $\frac{1}{6}$.

A menudo las probabilidades se asignan a partir de datos empíricos. Supongamos que clasificamos a los alumnos del CEIP de Rebordáns atendiendo a dos variables: curso y línea de autobús que toma para irse a casa.

	Primero	**Segundo**	**Tercero**	**Cuarto**	**Quinto**	**Sexto**
Línea 1	2	5	4	6	3	7
Línea 2	3	3	5	4	7	6
Línea 3	5	6	3	4	2	4

Interpretamos la tabla de doble entrada de la siguiente forma: hay 2 alumnos de primero que toman la línea 1, 5 de segundo que toman la línea 1, 4 de tercero que toman la línea 1, etc. Nuestro experimento aleatorio consiste en elegir un estudiante del colegio al azar. Algunos sucesos en los que podemos estar interesados son los siguientes:

- Es usuario de la línea 1
- Es usuario de la línea 2
- Es usuario de la línea 3
- Es un alumno de primer curso
- Es un alumno de sexto curso
- Es un alumno de segundo ciclo (tercero o cuarto)
- Es un alumno de la línea 2 o de sexto

Vamos a calcular las correspondientes probabilidades. Calculamos primeramente los totales de cada fila y columna.

	Primero	**Segundo**	**Tercero**	**Cuarto**	**Quinto**	**Sexto**	**Total**
Línea 1	2	5	4	6	3	7	27
Línea 2	3	3	5	4	7	6	28
Línea 3	5	6	3	4	2	4	24
Total	10	14	12	14	12	17	**79**

- La probabilidad de que un alumno use la línea 1 es: $\frac{27}{79}100 = 34.18\,\%$
- La probabilidad de que un alumno use la línea 2 es: $\frac{28}{79}100 = 35.44\,\%$
- La probabilidad de que un alumno use la línea 3 es: $\frac{24}{79}100 = 30.38\,\%$
- La probabilidad de que un alumno sea de primer curso es: $\frac{10}{79}100 = 12.66\,\%$
- La probabilidad de que un alumno sea de sexto curso es $\frac{17}{79}100 = 21.52\,\%$
- La probabilidad de que un alumno sea de segundo ciclo (tercero o cuarto) es $\frac{12+14}{79}100 = 32.91\,\%$
- La probabilidad de que un alumno o bien use la línea 2 o bien sea de sexto es $\frac{3+3+5+4+7+17}{79}100 = 49.37\,\%$

  En este último caso es de especial interés precisar que no se trata de sumar directamente la probabilidad de que un alumno use la línea 2 y la probabilidad de que un alumno sea de sexto, dado que, de hacerlo así, los alumnos de sexto que utilizan la línea 2 serían contabilizados dos veces.

Otros ejemplos

1. Consideremos que lanzamos dos dados de seis caras. ¿Cuál es la probabilidad de que salga en los dos dados el número 6? Y si lanzamos tres dados, ¿cuánto vale la probabilidad de que salga en los tres dados el número 1? Aplicando la regla de Laplace, la probabilidad de que salga en los dos dados el número 6 es, $\frac{1}{36} = 0.028 = 2.8\,\%$. La probabilidad de que salgan tres unos en los tres dados es $\frac{1}{6^3} = 0.0046 = 0.46\,\%$.
2. Supongamos que lanzamos un dado 9 veces y ha salido 9 veces el número 1. ¿Cuál es la probabilidad de que en el siguiente lanzamiento salga el número 1 de nuevo? Si el dado no está trucado, es $\frac{1}{6}$.
3. Consideremos el experimento aleatorio de lanzar dos dados (que se practica en algunos juegos de mesa, por ejemplo, en el Monopoly[3]). Calcula la probabilidad de que la suma sea 4. Interpreta la probabilidad obtenida. ¿Cuántas casillas avanzamos la mayor parte de las veces cuando jugamos al Monopoly?

   Lo primero que debemos considerar es la tabla que nos da las distintas sumas posibles con los dos dados:

$\mathbf{D_1/D_2}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

[3] De hecho, en el diseño de los tableros de juegos como el parchís, la oca, el monopoly, etc. se tiene en cuenta el cálculo de probabilidades.

Cada tirada del dado D_1 y del dado D_2 tienen la misma probabilidad. Para que la suma sea 4, o bien ocurrió el par $(1,3)$,ó el par $(3,1)$, ó el par $(2,2)$. Por tanto, la probabilidad vale

$$\frac{3}{36} = 0.083.$$

La interpretación, como la de cualquier probabilidad, es la siguiente: si repetimos el experimento, a la larga, cabe esperar que en el 8.3 % de las veces obtengamos una suma de 4. Observando la tabla vemos que el 7 es el valor que más aparece y su probabilidad es $\frac{6}{36} = 0.167$.

4. Consideremos un problema con el que nos encontramos frecuentemente en nuestro quehacer diario. Supongamos que estamos comprando en un supermercado con cuatro cajas disponibles para pagar. Si suponemos que las personas que las atienden son igualmente eficientes, o desconocemos su eficiencia, y nos colocamos al azar en una de las cuatro colas (que están en ese momento igual de saturadas), ¿cuál es la probabilidad de que la cola que hemos escogido no sea la más rápida?

   La probabilidad de que una cola sea la más rápida es $\frac{1}{4} = 0.25$. Dado que cada cola podría ser la más rápida y hemos elegido una de ellas, la probabilidad de que la cola que hemos elegido no sea la más rápida equivale a la probabilidad de que alguna de las otras sea la más rápida, es decir $\frac{3}{4} = 0.75$. Así, el 75 % de los días observaremos que alguna otra cola, distinta a la nuestra, va más rápida. Frecuentemente achacamos este hecho a que nos hemos equivocado de cola o a que tenemos mala suerte, cuando en realidad es una sencilla cuenta de probabilidades la que muestra que lo más probable es que veamos que alguna de las otras colas va más rápido que la nuestra.

   Podemos preguntarnos que ocurriría si estamos en un hipermercado en el que hay 10 cajas. En este caso, la probabilidad de que la nuestra no sea la mejor es del 90 %. A medida que aumenta el número de colas, más difícil es la elección y tenemos más posibilidades de equivocarnos.

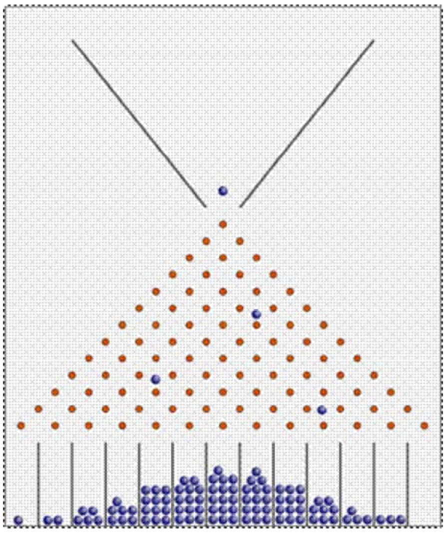


Figura 6: Máquina de Galton

5. La máquina de Galton (véase Figura 6), consiste en un tablero inclinado con varias filas de pivotes. Se dejan caer bolas desde la parte superior. Las bolas rebotan aleatoriamente en los pivotes y se depositan en los casilleros de la parte inferior. El funcionamiento de este artilugio se simula en muchas páginas web (ver por ejemplo, quincunx). Si la probabilidad de que una bola rebote en un pivote hacia la derecha o hacia la izquierda es la misma, del 50 %, entonces observamos que las bolas se acumulan en las casillas inferiores formando una especie de histograma que recuerda a la conocida campana de Gauss. La mayor parte de las bolas terminan en el receptáculo central

mientras que va disminuyendo la frecuencia de las mismas, de manera progresiva y casi simétrica, a medida que nos distanciamos, hacia la derecha o hacia la izquierda del centro. Si una bola siempre rebota hacia la derecha, la bola terminará en el recipiente más a la derecha. Fácilmente observamos que sólo hay un posible camino para que esto pase. Si hay un sólo un rebote hacia la izquierda y el resto son hacia la derecha, la bola terminará en el recipiente contigüo al último empezando por la derecha. En este caso el número de posibles caminos, que depende del número de filas con clavos que estemos considerando, será de 3 si disponemos de cuatro filas de pivotes. Cada fila del triángulo de Pascal, que ya hemos estudiado, nos da exactamente el número de caminos posibles para llegar al recipiente que ocupe esa posición en una máquina de Galton con el correspondiente número de filas de pivotes.

Es muy interesante cambiar la probabilidad de rebote, tomando por ejemplo una probabilidad de rebote hacia la derecha del 70 %, y observar cómo cambia la distribución que se genera.

Ejercicios sencillos para trabajar la intuición en probabilidades

1. En la lotería Primitiva hay que acertar 6 números de entre 49. ¿Cuál de las siguientes combinaciones es más probable? ¿Apostarías por cualquiera de ellas?

Combinación 1	1	2	3	4	5	6
Combinación 2	12	21	7	33	41	38
Combinación 3	44	45	46	47	48	49
Combinación 4	1	49	2	48	3	47

   Son todas igualmente probables, a pesar de que la mayor parte de la gente preferiría la combinación 2 para apostar.

2. Supongamos que realizamos una apuesta al lanzamiento de tres monedas: si en todas sale cara o en todas sale cruz, el apostante gana 1 euro mientras que, en caso contrario, el apostante tiene que pagar 50 céntimos de euro. ¿Cuánto dinero debe esperar ganar o perder el apostante si repite la apuesta muchas veces?

   Las posibilidades en cada lanzamiento son las siguientes (c denota cara y + denota cruz):

   ccc, cc+, c+c, c++, +cc, +c+, ++c, +++

   Por lo tanto, aplicando la regla de Laplace, la probabilidad de ganar es del $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 25\,\%$. La ganancia (o pérdida) media, vendría dada por:

$$\begin{aligned} \text{Media} &= \text{Ganancia} \times \text{Probabilidad de ganar} - \text{Pérdida} \times \text{Probabilidad de perder} \\ &= 1 \text{ euro } \times \frac{1}{4} - 0.5 \text{ euros } \times \frac{3}{4} = -\frac{1}{8} = -0.125 \text{ euros.} \end{aligned}$$

   Dicho de otra forma, si repite este juego, a la larga el jugador perderá una media de 12.5 céntimos en cada partida. Aunque haya rondas en las que gane el euro, habrá muchas más rondas en las que tenga que pagar los 50 céntimos. En este tipo de cálculos se basan los juegos de apuestas con que nos bombardean continuamente.

3. Consideremos los siguientes datos extraídos de http://www.nsc.org/lrs/statinfo/odds.htm)[4]

   Aparecen las muertes de los seres humanos por diversas causas (de menos frecuente a más frecuente). Se pueden elaborar diversas preguntas para saber si los alumnos son capaces de saber si un suceso es más probable que otro. También es de interés que, con ayuda de una calculadora, aproximen la última de las probabilidades que se indica (probabilidad de muerte debida a cualquier causa) como suma de todas las anteriores.

   - Contacto con serpientes venenosas: 1 entre 1.874.034
   - Contacto con arañas venenosas: 1 entre 468.508
   - Accidente con fuegos artificiales: 1 entre 340.733
   - Mordido o picado por insectos no venenosos: 1 entre 312.339
   - Accidente de tren: 1 entre 156.169
   - Inundación: 1 entre 144.156
   - Terremoto: 1 entre 117.127
   - Mordido o herido por un perro 1: entre 117.127
   - Accidente de bus: 1 entre 104.113
   - Un rayo: 1 entre 79.746
   - Picadura de avispas: 1 entre 56.789
   - Exposición a excesivo calor natural: 1 entre 13.729
   - Ahogamiento accidental en la bañera: 1 entre 11.289
   - Intoxicación por Alcohol: 1 entre 10.048
   - Electrocutado accidentalmente: 1 entre 9.968
   - Asfixia o ahogamiento accidental en la cama: 1 entre 7.541
   - Ahogamiento accidental en una piscina: 1 entre 7.278
   - Exposición a excesivo frío natural: 1 entre 6.045
   - Disparo accidental por arma de fuego: 1 entre 5.134
   - Accidente aéreo o espacial: 1 entre 5.051
   - Accidente en bicicleta: 1 entre 4.919
   - Por caer de una cama, silla u otro mobiliario: 1 entre 4.473
   - Obstrucción del tracto respiratorio al ingerir comida: 1 entre 4.284
   - Al caer de unas escaleras: 1 entre 2.360
   - En un incendio incontrolado en un edificio: 1 entre 1.358
   - Complicaciones medicas tras una operación: 1 entre 1.313
   - Fuego o humo: 1 entre 1.113
   - Accidente de moto: 1 entre 1.020
   - Ahogado: 1 entre 1.008
   - Accidente peatonal: 1 entre 626

[4]NSC es una organización pública que promueve la seguridad y la salud en USA. Los datos están referidos a este país.

- Estupefacientes y alucinógenos: 1 entre 406
- Asalto con arma de fuego: 1 entre 314
- Accidente de coche: 1 entre 237
- Caída: 1 entre 218
- Suicidio: 1 entre 119
- Accidente con cualquier tipo de vehículo a motor: 1 entre 84
- Embolia: 1 entre 24
- Cáncer: 1 entre 7
- Ataque al corazón: 1 entre 5
- Por cualquier causa: 1 entre 1

En este tipo de probabilidades se basan las compañías aseguradoras para calcular las primas de los seguros.

5. Lógica y conjuntos

En Matemáticas la precisión del lenguaje desempeña un papel fundamental. La Matemática es una ciencia lógica y como tal emplea un lenguaje uniforme con el fin de evitar ambigüedades e imprecisiones. La gracia del siguiente chiste se basa precisamente en esta idea de máximo rigor:

> Un astrónomo, un físico y un matemático viajaban en tren por Galicia. Sorprendidos, vieron por la ventanilla un rebaño de ovejas negras pastando en un prado. El astrónomo observó: "En Galicia todas las ovejas son negras". El físico precisó: "Algunas ovejas en Galicia son negras". El matemático sentenció: "En Galicia existe un rebaño en el que todas las ovejas son negras al menos por un lado".

Consideramos que sería muy interesante comenzar a trabajar de forma intuitiva la lógica matemática. Para nuestros propósitos diremos que una proposición es un enunciado del que se puede afirmar si es verdadero o falso. Algunas afirmaciones no cumplen este criterio, son las antinomias, enunciados que conllevan una contradicción. Una de las más famosas es la llamada paradoja del mentiroso, atribuida al cretense Epiménides, quien afirmó: **Todos los cretenses mienten**. Otra antinomia igualmente sencilla es: **Esta afirmación es falsa**. En la literatura pueden encontrarse muchos ejemplos de este tipo de enunciados. En el capítulo LI de la segunda parte de El Quijote (*Del progreso del gobierno de Sancho Panza, con otros sucesos tales como buenos*) encontramos esta curiosa situación:

> Señor, un caudaloso río dividía dos términos de un mismo señorío, y esté vuestra merced atento, porque el caso es de importancia y algo dificultoso... Digo, pues, que sobre este río estaba una puente, y al cabo della una horca y una como casa de audiencia, en la cual de ordinario había cuatro jueces que juzgaban la ley que puso el dueño del río, de la puente y del señorío, que era en esta forma: "Si alguno pasare por esta puente de una parte a otra, ha de jurar primero adónde y a qué va; y si jurare verdad, déjenle pasar; y si dijere mentira, muera por ello ahorcado en la horca que allí se muestra, sin remision alguna"[...] Sucedió, pues, que tomando juramento a un hombre juró y dijo que para el juramento que hacía, que iba a morir en aquella horca que allí estaba, y no a otra cosa.

Lewis Carroll nos dejó también una versión de la paradoja del mentiroso, en este pequeño relato titulado *El cocodrilo*:

> Un cocodrilo había robado un bebé a orillas del Nilo y, como es natural, la madre le imploraba que le devolviese a su pequeño. “Está bien”, dijo el cocodrilo, “si dices la verdad respecto de lo que voy a hacer, te lo devolveré, de lo contrario, lo devoraré”. “¡Lo vas a devorar!”, exclamó la angustiada madre. “En tal caso”, repuso el taimado cocodrilo, “no puedo devolverte a tu hijo, porque si lo hago, eso querría decir que no has dicho la verdad, y ya te advertí que, si no decías la verdad, lo devoraría”. “Al contrario”, explicó la aún más astuta madre del pequeño, “no puedes comerte a mi hijo, porque si lo haces, eso quiere decir que me has obligado a decir la verdad, y me prometiste que, si decía la verdad, me devolverías a mi hijo”. (Hemos de pensar, por supuesto, que era un cocodrilo de palabra, y que su sentido del honor superaba con creces su tendencia a comerse niños pequeños).

La estructura de una proposición lógica viene dada por sus partículas lógicas. Las partículas lógicas más importantes son:

- El cuantificador universal que significa “para todo” o “cualquiera que sea”.
- El cuantificador existencial que significa “hay uno” o “existe al menos uno”.

En general, a una proposición A puede asociársele su contraria, o negación, no A: otra proposición que cumple que si una es cierta la otra es falsa y viceversa. Un sencillo ejercicio consistiría en determinar si cada una de las siguientes proposiciónes es verdadera o falsa y escribir su negación.

- Todo gallego tiene una renta anual superior a 30.000 euros.
- Todos los videojuegos son baratos.
- Algunos números naturales son pares.
- Hay alumnos que no aprueban matemáticas.

Dos proposiciones A y B pueden combinarse de distintas formas para dar lugar a otra proposición lógica.

- Proposición conjuntiva, A y B: es cierta si, y sólo si, A y B son ciertas simultńeamente.
- Proposición disyuntiva, A o B: es cierta si, y sólo si , al menos una de las proposiciones iniciales es cierta.

Dadas dos proposiciones A y B, la implicación $A \Rightarrow B$ es una proposición que permite asegurar que si A es cierta entonces B también lo es. Dos proposiciones A y B se dicen equivalentes, $A \Leftrightarrow B$, cuando las implicaciones lógicas $A \Rightarrow B$ y $B \Rightarrow A$ son ambas ciertas.

Veamos algunos ejemplos.

- Negación: **No** voy al patio.
- Conjunción: Voy al patio **y** juego al fútbol. Voy al patio **y** no juego al fútbol. Voy al patio, juego al fútbol y soy de segundo curso
- Disyunción: Voy al patio **o** juego al fútbol. Voy al patio **o** juego al fútbol **o** soy de segundo curso
- Condicional (implicación): Voy al patio **si** juego al fútbol. Juego al fútbol **si** voy al patio.
- Bicondicional (equivalencia): Voy al patio **si, y sólo si,** juego al fútbol.

La negación de la conjunción y la disyunción de dos proposiciones se basa en las siguientes reglas (leyes de De Morgan):

- La negación de la disyunción de dos proposiciones es la conjunción de sus negaciones:
  no (A o B) = (no A) y (no B).
- La negación de la conjunción de dos proposiciones es la disyunción de sus negaciones:
  no (A y B) = (no A) o (no B).

Escribe la negación de las siguientes frases.

1. O bien Pedro no estuvo aquí o bien está mintiendo.
2. Él es más viejo que ella pero sabe menos.
3. Todo las personas queremos a alguien. ("Everybody loves somebody")
4. Julia tiene un coche y una bicicleta.
5. María toca la guitarra pero no sabe solfeo.
6. Todas las motocicletas hacen ruido y contaminan.
7. Todos los perros o están domesticados o están enfermos.
8. Algunos gatos comen peces y beben leche.
9. Ningún elefante soporta a un ratón.
10. Todos los triángulos son isóceles o equiláteros.
11. El número 2 es primo y par.

Una de las relaciones lógicas más difíciles de comprender es, sin duda, la implicación y, de forma muy especial, su negación. Recordemos un experimento que nos ayudará a entender este concepto. El psicólogo Peter Watson repartió entre varios individuos cuatro tarjetas con los símbolos A, D, 3 y 7 en una cara y les aseguró que cada tarjeta tenía un número en una cara y una letra en la otra. A continuación les preguntó qué tarjetas habría que volver para establecer la siguiente regla: "Si una tarjeta tiene una A en una cara entonces tiene un 3 en la otra". La mayoría de los individuos respondió erróneamente que hay que volver las tarjetas A y 3. Observemos que la regla tiene la estructura de una proposición lógica del tipo $[A \Rightarrow B]$ y, por tanto, es equivalente a la proposición [no $B \Rightarrow$ no A]. Así pues, la respuesta correcta es que debemos volver las tarjetas A y 7, o sea, comprobar que la tarjeta A tiene en el reverso el número 3 ($A \Rightarrow B$) y que la tarjeta del 7 (no B) tiene en el reverso la letra D (no A). La Figura 7, en la que el anverso de cada tarjeta se representa en la parte superior y el reverso en la inferior de cada dibujo, ilustra dos situaciones en las que volver las tarjetas A y 3, como sugerían los individuos encuestados, no permite establecer la veracidad de la regla. En el juego 1, la regla es falsa aunque las tarjetas A y 3 la cumplen; mientras que en el juego 2 la regla es cierta aunque detrás de la tarjeta del 3 no está letra A.

Juego 1

A	D	3	7
3	7	A	A

Juego 2

A	D	3	7
3	7	D	D

Figura 7: Juego de las tarjetas

La teoría de conjuntos fue creada por Cantor a partir del año 1872. Hasta el fin del siglo XIX la noción de conjunto pareció intuitiva. Citemos la célebre definición del propio Cantor: *Por conjunto se* *entiende una agrupación en un todo de objetos diversos de nuestra intuición o de nuestro pensamiento.* Pero la utilización de los conjuntos sin la ayuda de reglas precisas conduce inexorablemente a paradojas. Para nosotros un conjunto está determinado cuando conocemos los objetos o elementos que lo forman. Por ejemplo:

- El conjunto de las vocales $\{a, e, i, o, u\}$.
- El conjunto de las cifras del sistema de numeración decimal: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Los conjuntos suelen designarse con letras mayúsculas. Se emplean las llaves { } para determinar al "conjunto que consta de". Entre las llaves, o bien enumeramos los elementos del conjunto o bien los caracterizamos mediante una propiedad que los defina. Consideremos el conjunto $A = \{r, s, t\}$. Dado que r es un elemento de A diremos que r pertenece al conjunto A y escribiremos $r \in A$. El símbolo $\notin$ se lee "no pertenece". Así, $r \in A$ y $a \notin A$. Dados un conjunto A y un elemento m o bien $m \in A$ o bien $m \notin A$. El conjunto que no tiene ningún elemento se denomina conjunto vacío y se denota con el símbolo $\emptyset$. Dado un conjunto $M \neq \emptyset$ siempre existe al menos un elemento m tal que $m \in M$. Los conjuntos formados por un único elemento se llaman unitarios. Podemos definir muchas relaciones y operaciones entre conjuntos.

- Un conjunto A es un subconjunto de X si todo elemento de A también lo es de X. Escribiremos $A \subset X$ y diremos que A está contenido en X o que A es una parte de X.
- Dos conjuntos A y X son iguales, $A = X$, si y sólo si $A \subset X$ y $X \subset A$.
- Si $A \subset X$, los elementos de X que no pertenecen a A forman el conjunto complementario de A con respecto a X.
- Dados dos conjuntos $A, B \in X$ se denomina unión de A y B, y se designa por $A \cup B$, al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B.
- Dados dos conjuntos $A, B \in X$ se denomina intersección de A y B, y se designa por $A \cap B$, al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y a B. Dos conjuntos A y B que no tienen elementos comunes, es decir $A \cap B = \emptyset$, se llaman conjuntos disjuntos.

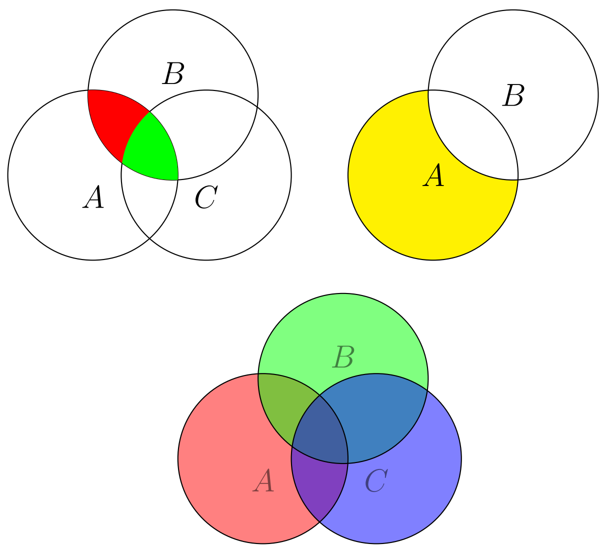


Figura 8: Diagramas de Venn

Cuando hay que considerar relaciones entre varios conjuntos es instructivo y de mucha ayuda representar a cada uno por una región en el plano. Estas regiones han de dibujarse de modo que todos los elementos que pertenecen a un cierto conjunto estén contenidos en la misma región cerrada. Se llaman diagramas de Venn a los que se construyen de esta forma. Con ayuda de los diagramas de Venn es sencillo no sólo representar conjuntos sino también proposiciones y sus relaciones lógicas.

Otros ejercicios

1. Leemos en un periódico: "El Tribunal Supremo no admite a trámite el recurso a una decisión de un tribunal inferior en la que se aprueba el rechazo de un juez a permitir que un acusado se niegue a hablar". ¿Tiene el acusado derecho a negarse a hablar?

2. Una de las siguintes proposiciones es la negación de: "Todos los bancos están abiertos todos los días".

   a) Hay un día en el que todos los bancos están cerrados.

   b) Algún banco está cerrado por lo menos un día.

   c) Todos los bancos están cerrados todos los días.

   d) Cada banco está cerrado por lo menos un día.

3. Niega las siguientes proposiciones.

   a) En todas las prisiones hay un preso que es amigo de un carcelero.

   b) Hay un país en el que todos los animales domésticos están vacunados.

   c) En calquier país hay al menos un pueblo en el que todas las casas que están a más de un kilómetro del centro tienen una huerta.

4. Representa mediante diagramas de Venn los siguientes enunciados.

   a) A todos los estudiantes del CEIP de Rebordán les gustan las Matemáticas.

   b) En el equipo de fútbol del colegio hay niñas que tocan la flauta.

   c) Todos los niños que ni juegan al tenis ni hacen teatro leen cuentos de Mortadelo y Filemón.

5. Analiza desde el punto de vista de la lógica proposicional este epitafio:

   Los que lo conocieron lo amaron.
   Los que no lo amaron, no lo conocieron.

6. ¿El pintor más viejo entre los poetas y el poeta más viejo entre los pintores son la misma persona? ¿Es el mejor pintor entre los poetas el mejor poeta entre los pintores?

Recomendaciones

Concluimos este informe con unas recomendaciones generales. La primera es que consideramos útil practicar la grafía de letras utilizadas en otros alfabetos, principalmente la escritura de letras del alfabeto griego, que se utilizan con frecuencia en Matemáticas:

α	β	γ	δ	ε	η	θ	κ	λ	μ	ν	ξ	π	ρ
alfa	beta	gamma	delta	epsilon	eta	theta	kappa	lambda	mu	nu	xi	pi	ro
σ	τ	ϕ	φ	χ	ψ	ω	Γ	Δ	Π	Σ	Φ	Ψ	Ω
sigma	tau	phi	varphi	chi	psi	omega	gamma	delta	pi	sigma	phi	psi	omega

Nuestra segunda recomendación es un libro que presenta la estadística a través de caricaturas. La traducción al gallego corrió a cargo de la Sociedade Galega para a Promoción da Estatística, SGAPEIO:

- Gonick, Larry y Smith, Woollcott (2000) *A estatística en caricaturas*. SGAPEIO (Sociedade Galega para a Promoción da Estatística).

La página web Divulgamat, Centro virtual de divulgación de las Matemáticas, de la Real Sociedad Matemática Española, es un portal imprescindible para mantenerse al tanto de todo tipo de material (literatura, música, magia, teatro, etc.) relacionado con las Matemáticas.

http://www.divulgamat.net/

Nosotros entendemos que la Matemática es una rama del conocimiento humano y que, en consecuencia, se desarrolla por el trabajo de hombres y mujeres que dedican su esfuerzo a estudiarla y a ampliar sus horizontes. Acercarse a estos personajes es fundamental para comprender por qué y cómo surgieron las ideas matemáticas más importantes. En este breve informe hemos mencionado a ciertos personajes que merecen ser conocidos por nuestros estudiantes así como algunos otros que relacionamos a continuación: Blaise Pascal, Carl Friedrich Gauss, Pierre-Simon Laplace, Florence Nightingale, Francis Galton, Andréi Kolmogórov, Gertrude Mary Cox,...

Aunque en inglés, la página web del MacTutor History of Mathematics archive, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/, es una fuente rigurosa de información biográfica de personajes matemáticos. La ya mencionada página de Divulgamat también tiene un apartado dedicado a biografías de matemáticos célebres. La editorial Nivola publica una colección titulada *La Matemática en sus personajes*, con cerca de 50 títulos.