Arbitraje, optimalidad y equilibrio

Miguel Ángel Mirás Calvo
Universidad de Vigo

Abril, 2003

Índice General

Introducción

MERCADOS FINANCIEROS

Un mercado financiero es un lugar donde:

- recaudar fondos
- invertir capital

Los inversores más habituales son:

- Compañías
- Estados
- Bancos
- “Pequeños inversores”

Los mercados pueden dividirse en:

- Mercados de divisas
- Mercados de valores
- Mercados de bonos

Diferencias entre bonos y acciones:

- Los precios de las acciones dependen de la compra-venta. Como poseedor de una acción eres propietario de una parte de una compañía.
- Los bonos son productos de renta fija. Garantizan al vencimiento una rentabilidad conocida. El emisor de un bono da a su comprador un crédito.

Algunos productos se denominan:

- Derivados pues sus precios dependen (se derivan) de los precios de otros productos llamados subyacentes.

¿Qué es la ingeniería financiera?

Desarrollo de técnicas, instrumentos y productos para controlar el riesgo financiero y prevenir la morosidad.

Tipos de riesgos financieros

Riesgos en las operaciones. Riesgos en los precios de mercado. Riesgos en los tipos de cambio. Riesgos en los tipos de interés. Riesgos de crédito.

Riesgo

Contingencia o proximidad de un cambio.

Ejemplo:

Riesgo en el precio de un activo financiero. Denotaremos por P^t el precio de un activo en el instante t. Normalmente estos precios cambian de un modo aleatorio (café, oro, acciones, bonos, ...)

Excepción:

Una cuenta bancaria. Si el capital inicial en $t = 0$ es B^0 entonces

$$\begin{array}{ll} B^t = B^0(1+r)^t & \text{interés compuesto} \\ B^t = B^0 e^{rt} & \text{interés continuo} \end{array}$$

donde r es el tipo de interés. En el instante t, el pago B^t está asegurado (no hay riesgo). La rentabilidad

$$R = \frac{B^t - B^0}{B^0} = \frac{B^t}{B^0} - 1 = r, \text{ el tipo de interés}$$

se fija de antemano.

Podemos decir que todos los instrumentos financieros sirven, en mayor o menor medida, para controlar el riesgo.

Arbitraje

Operación de cambio de valores mercantiles, en la que se busca la ganancia sin riesgo aprovechando o bien que los precios son incorrectos o bien la diferencia de precios entre unas plazas y otras.

EJEMPLO:

Imaginemos un contrato (forward) en el que dos partes acuerdan que una compre a la otra un determinado activo en un instante futuro T por un precio K estipulado en el momento de firmar el contrato ($t = 0$).

Posición larga en el contrato: la parte que acepta comprar el activo al precio de ejercicio K en el instante T.

Posición corta en el contrato: la parte que acepta vender el activo al precio K en la fecha de vencimiento T.

PRIMER RAZONAMIENTO POR ARBITRAJE:

¿Cual debería ser el valor K estipulado? Sea P^0 el precio del activo en $t = 0$.

- Si $K > P^0(1+r)^T$, pedimos un préstamo en el banco de P^0 a tipo de interés r, compramos el activo y tomamos una posición corta en el contrato. Al vencimiento, necesitamos $P^0(1+r)^T$ para devolver el préstamo, pero recibimos K por la venta del activo.

  Ganancia: $K - P^0(1+r)^T$

- Si $K < P^0(1+r)^T$, nos endeudamos en el activo, depositamos el dinero recibido P^0 en el banco a un tipo de interés r y tomamos una posición larga en el contrato. Al vencimiento, tenemos $P^0(1+r)^T$ en el banco, lo que nos permite comprar el activo por K y devolverlo.

  Ganancia: $P^0(1+r)^T - K$

El valor K estipulado debe ser:

$$\boxed{K = P^0(1+r)^T}$$

Opciones

Básicamente, una opción es un contrato que da a su poseedor el derecho (que no la obligación) de comprar o vender "algo" (llamado el subyacente) en un instante futuro (la fecha de ejercicio) a un precio estipulado (el precio de ejercicio). Nos centraremos en las opciones sobre acciones, que pueden ser de varios tipos:

1. **Call:** derecho de compra.
2. **Put:** derecho de venta.
3. **Europeas:** sólo pueden ejercerse en la fecha de expiración.
4. **Americanas:** pueden ejercerse en cualquier instante durante la vida de la opción.

Éstos son los términos que deben especificarse en el contrato de una opción, tanto Call como Put, y que son relevantes para los modelos teóricos de valoración:

1. **El subyacente:** el tipo de activo que puede ser comprado o vendido. Su precio de mercado en un instante t se denotará por P^t. Puede ser una acción, un bono, un tipo de cambio, un tipo de interés, un índice, una mercancía,...
2. **El volumen del contrato:** el número de acciones del subyacente reflejadas en el contrato.
3. **El precio de ejercicio K:** el precio al que el subyacente debe ser comprado si la opción se ejerce.
4. **La fecha del contrato:** la fecha en la que se firma y paga el contrato ($t = 0$).
5. **La fecha de expiración T:** la fecha de vencimiento de la opción.
6. **El tipo:** europea o americana.
7. **La prima:** el precio pagado por el contrato.

Trabajaremos con los tipos de opciones más sencillas, esto es, las de tipo europeo sobre acciones que no paguen dividendos. El valor de una opción de compra europea (Call) al vencimiento viene dado por:

$$CA^T = \max\{P^T - K, 0\}.$$

El valor de una opción de venta europea (Put) al vencimiento es:

$$PU^T = \max\{K - P^T, 0\}.$$

¿Cuánto debería pagar, CA^0, el comprador de una Call por el "derecho" que le garantiza la opción?

$$\boxed{CA^0 \geq 0}$$

SEGUNDO RAZONAMIENTO POR ARBITRAJE:

El principio económico de la ausencia de arbitraje nos permite derivar las siguientes relaciones:

- $\boxed{CA^0 \leq P^0}$

  Consideremos las carteras:

  Cartera 1: (CRT1) Una opción Call.

  Cartera 2: (CRT2) Una acción del subyacente.

  Valor de las carteras al vencimiento:

$$\begin{aligned} &CRT1^T = \max\{P^T - K, 0\} \\ &CRT2^T = P^T \\ &CRT1^T \leq CRT2^T \end{aligned}$$

- $\boxed{CA^0 \geq \max\{P^0 - K(1+r)^{-T}, 0\}}$

  Consideremos las carteras:

  Cartera 1: (CRT1) Una opción Call y $K(1+r)^{-T}$ en dinero.

  Cartera 2: (CRT2) Una acción del subyacente.

  Valor de las carteras al vencimiento:

$$\begin{aligned} &CRT1^T = K + \max\{P^T - K, 0\} = \max\{P^T, K\} \\ &CRT2^T = P^T \\ &CRT1^T \geq CRT2^T \end{aligned}$$

- $\boxed{CA^0 - PU^0 = P^0 - K(1+r)^{-t}}$ Paridad Put-Call

  Consideremos las carteras:

  Cartera 1: (CRT1) Una opción Call y $K(1+r)^{-T}$ en dinero.

  Cartera 2: (CRT2) Una acción del subyacente y una opción Put.

  Valor de las carteras al vencimiento:

$$\begin{aligned} &CRT1^T = \max\{P^T - K, 0\} = \max\{P^T, K\} \\ &CRT2^T = P^T + \max\{K - P^T, K\} = \max\{P^T, K\} \\ &CRT1^T = CRT2^T \end{aligned}$$

Capítulo 1

Arbitraje

Nuestro propósito en este capítulo es presentar de modo sencillo e intuitivo la teoría del arbitraje y sus aplicaciones a los problemas de valoración de activos financieros.

1.1 Mercados de período único

Fijemos un conjunto de tiempos $\mathbb{T} = \{0, 1\}$. Supondremos que la fuente de incertidumbre en el mercado viene dada por un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Definición 1.1.1 *Diremos que el modelo del mercado es finito si* $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ *y* $\mu_k = \mu(\omega_k) > 0$ *para todo* $k = 1, \ldots, n$*.*

Supongamos que en el mercado se negocian $d+1$ activos, $d \in \mathbb{N}$. El vector

$$P^0 = (P_0^0, P_1^0, \ldots, P_d^0) \in \mathbb{R}_+^{d+1}$$

representa el vector de precios de los activos en $t = 0$.

La variable aleatoria

$$P^1 \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{d+1}, \qquad P^1(\omega) = (P_0^1(\omega), P_1^1(\omega), \ldots, P_d^1(\omega)) \in \mathbb{R}^{d+1}$$

nos da los pagos de los activos en $t = 1$, de modo que para cada $\omega \in \Omega$, $P_j^t(\omega)$ es el precio del activo j en el instante de tiempo t si el estado de la naturaleza que se revela es ω.

El activo de índice 0 es el numerario, es decir, un activo sin riesgo (un bono o un depósito bancario). Sin pérdida de generalidad podemos tomar $P_0^0 = 1$, $P_0^1(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$. En particular, si $P_0^1(\omega) \geq 1$ entonces la variable $r = P_0^1 - 1$ se denomina el tipo de interés. Si r es determinista (depósito bancario) entonces $P_0^1(\omega) = 1 + r$.

Una cartera de activos es un vector $x = (x_0, x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ donde x_j es la cantidad negociada del activo j-ésimo en el instante $t = 0$.

CRITERIO DE SIGNOS:

Posición larga si $x_j > 0$, es decir, compra de x_j unidades del activo j.
Posición corta si $x_j \leq 0$, es decir, venta de $-x_j$ unidades del activo j.

Dada una cartera $x = (x_0, x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$, su precio en $t = 0$ viene dado por

$$P^0 \cdot x = \sum_{k=0}^{d} P_k^0 x_k \in \mathbb{R};$$

los pagos en $t = 1$ vienen determinados por la variable aleatoria

$$P^1 \cdot x = \sum_{k=0}^{d} P_k^1 x_k \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R};$$

y las ganancias asociadas vienen determinados por la variable aleatoria

$$(P^1 - P^0) \cdot x = P^1 \cdot x - P^0 \cdot x \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Denominaremos precios normalizados a la variable

$$\bar{P}^1 = (1, \bar{P}_1^1, \ldots, \bar{P}_d^1) \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{d+1}, \qquad \bar{P}_k^1 = \frac{P_k^1}{P_0^1},\ k = 1, \ldots, d.$$

Es fácil comprobar que dada cualquier cartera $x = (x_0, x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$,

$$\bar{P}^1 \cdot x = \frac{P^1 \cdot x}{P_0^1}.$$

1.1.1 Arbitraje

CARTERAS DOMINANTES

Definición 1.1.2 *Una cartera $\hat{x} \in \mathbb{R}^{d+1}$ es dominante si existe $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ tal que*

$$P^0 \cdot x = P^0 \cdot \hat{x} \text{ y } (P^1 \cdot x)(\omega) < (P^1 \cdot \hat{x})(\omega)$$

para todo $\omega \in \Omega$.

Proposición 1.1.3 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *En el mercado existe una cartera dominante*
2. *Existe $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ tal que $P^0 \cdot x = 0$ y $(P^1 \cdot x)(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$.*
3. *Existe $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ tal que $P^0 \cdot x < 0$ y $(P^1 \cdot x)(\omega) \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$.*

Definición 1.1.4 *Diremos que un vector $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n_+$ define una regla lineal de valoración si:*

$$P^0 \cdot x = \sum_{k=1}^{n} q_k (\bar{P}^1 \cdot x)(\omega_k), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^{d+1}. \tag{1.1}$$

Es fácil comprobar que si $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n_+$ define una regla lineal de valoración entonces $\sum_{k=1}^{n} q_k = 1$. Así pues, el vector q puede interpretarse como una distribución de probabilidad sobre los estados de la naturaleza de modo que q_k sería la probabilidad de ω_k. Consecuentemente, la expresión (1.1) equivale a:

$$P_j^0 = E_q\Big[\frac{P_j^1}{P_0^1}\Big] = E_q[\bar{P}_j^1], \text{ para todo } j = 0, \dots, d. \tag{1.2}$$

En definitiva, $q \in \mathbb{R}^n_+$ define una regla lineal de valoración si, y sólo si, q es una distribución de probabilidad sobre Ω tal que se cumple (1.2).

Analizando el programa lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & P^0 \cdot x \\ \text{sujeto a:} & \begin{cases} \bar{P}^1 \cdot x \geq 0 \\ x = (x_0, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1} \end{cases} \end{array} \qquad (P)$$

y su correspondiente dual

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 0 \cdot q \\ \text{sujeto a:} & \begin{cases} P_j^0 = E_q\left[\dfrac{P_j^1}{P_0^1}\right], \; j = 0, \ldots, d \\ q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}_+^n \end{cases} \end{array} \qquad (D)$$

se obtiene la siguiente caracterización de la ausencia de carteras dominantes.

Proposición 1.1.5 *No hay carteras dominantes en el mercado si y sólo si existe una regla lineal de valoración.*

LEY DEL PRECIO ÚNICO

Definición 1.1.6 *Se dice que el mercado verifica la ley del precio único (abreviadamente, LOP) si no puede haber dos carteras $x, y \in \mathbb{R}^{d+1}$ tales que*

$$P^0 \cdot x \neq P^0 \cdot y \;\; \textit{pero} \;\; P^1 \cdot x = P^1 \cdot y.$$

Definición 1.1.7 *Un vector $q \in \mathbb{R}^n$ se denomina un factor de descuento estocástico admisible si*

$$P^0 \cdot x = \sum_{k=1}^{n} q_k (\bar{P}^1 \cdot x)(\omega_k),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^{d+1}$.

Proposición 1.1.8 *Se verifica la LOP si y sólo si existe un factor de descuento estocástico admisible.*

Proposición 1.1.9 *Si no hay carteras dominantes en el mercado entonces se verifica la LOP.*

AUSENCIA DE ARBITRAJE

Definición 1.1.10 *Una oportunidad de arbitraje es una cartera* $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ *tal que*

$$P^0 \cdot x = 0 \ \text{ y } P^1 \cdot x > 0.$$

Proposición 1.1.11 *Una cartera* $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ *es una oportunidad de arbitraje si y sólo si*

$$(\bar{P}^1 - P^0) \cdot x > 0.$$

Proposición 1.1.12 *Si hay carteras dominantes en el mercado entonces hay oportunidades de arbitraje.*

Las relaciones entre estos conceptos se resumen en el diagrama de la figura 1.1.

Figura 1.1: Relaciones entre los distintos conceptos de arbitraje

1.1.2 El teorema fundamental de la valoración de activos

Definición 1.1.13 *Una medida de probabilidad Q en Ω es una medida neutral al riesgo, también llamada medida de martingala equivalente (abreviadamente, m.m.e.) a μ, si:*

1. $Q(\omega_k) > 0$ *para todo* $k = 1, \ldots, n$.
2. $P_j^0 = E_Q[\bar{P}_j^1]$ *para todo* $j = 0, \ldots, d$.

Si Q es una m.m.e. a μ entonces dada $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ se tiene que

$$E_Q[(\bar{P}^1 - P^0) \cdot x] = E_Q[(\bar{P}^1 - P^0)] \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$

De esta propiedad se deduce el siguiente resultado:

Proposición 1.1.14 *Si existe una m.m.e. a μ entonces no hay oportunidades de arbitraje en el mercado.*

Consideremos el subespacio vectorial

$$L = \{(\bar{P}^1 - P^0) \cdot x : x \in \mathbb{R}^{d+1}\} \subset \mathbb{R}^n$$

y el cono

$$C = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n : \text{ alguna componente } y_j > 0\}.$$

De forma inmediata de la proposición 1.1.11 se deduce la siguiente formulación geométrica de la ausencia de oportunidades de arbitraje.

Proposición 1.1.15 *Existe una oportunidad de arbitraje en el mercado si y sólo si*

$$L \cap C \neq \emptyset.$$

El recíproco de la proposición 1.1.14 anterior se denomina el teorema fundamental de la valoración de activos y su demostración en este caso sencillo se basa en la versión del teorema de separación que enunciamos.

Teorema 1.1.16 (Teorema de separación) *Sean L un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y S un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$ tales que $L \cap S \neq \emptyset$. Entonces L y S se pueden separar estrictamente por un hiperplano que contiene a L, esto es, existe $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal tal que $F(x) = 0$ para todo $x \in L$ y $F(x) > 0$ para todo $x \in S$.*

El conjunto

$$S = \{y \in C : E_\mu[y] = 1\} = \{(y_1, \ldots, y_n) \in C : \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_n y_n = 1\}$$

es convexo y compacto.

Teorema 1.1.17 (Teorema fundamental de la valoración de activos) *No hay oportunidades de arbitraje en el mercado si y sólo si existe una m.m.e. a μ.*

Con el fin de ilustrar la geometría de este resultado, consideraremos los conjuntos

$$L^{\perp} = \{y \in \mathbb{R}^n : y \cdot \ell = 0, \text{ para todo } \ell \in L\}$$
$$\mathbb{P}^{+} = \{y \in \mathbb{R}^n : y_1 + \cdots + y_n = 1, y_1 > 0, \ldots, y_n > 0\}$$
$$\mathbb{M} = \{Q : Q \text{ m.m.e. a } \mu\}$$

Resulta sencillo comprobar que

$$\mathbb{M} = L^{\perp} \cap \mathbb{P}^{+}$$

que $L^{\perp}$ es un subespacio lineal y que $\mathbb{P}^{+}$ se corresponde con el conjunto de medidas de probabilidad en Ω equivalentes a μ. El teorema fundamental afirma, pues, que

$$L \cap C = \emptyset \text{ si y sólo si } L^{\perp} \cap \mathbb{P}^{+} \neq \emptyset.$$

Véase la figura 1.1.2.

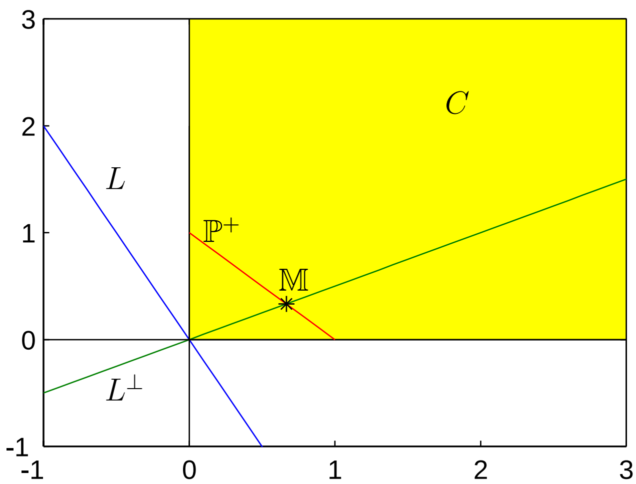


Figura 1.2: Interpretación geométrica del teorema fundamental

1.1.3 Valoración

Definición 1.1.18 *Un pago H es cualquier variable aleatoria $H\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Un pago H es alcanzable si existe $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ tal que $P^1 \cdot x = H$. La cartera x se denomina una réplica de H.*

Naturalmente, si $Q \in \mathbb{M}$ y $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ entonces

$$P^0 \cdot x = E_Q\Big[\frac{P^1 \cdot x}{P_0^1}\Big].$$

Proposición 1.1.19 *Si se cumple la LOP y H es un pago alcanzable entonces el valor*

$$\pi(H) = E_Q\Big[\frac{H}{P_0^1}\Big]$$

con x una réplica de H está bien definido.

Corolario 1.1.20 *Si no hay oportunidades de arbitraje y H es un pago alcanzable entonces*

$$\pi(H) = E_Q\Big[\frac{H}{P_0^1}\Big]$$

cualquiera que sea $Q \in \mathbb{M}$.

En particular, fijado $k = 1, \ldots, n$, el precio del pago $H_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$,

$$d_k = \pi(H_k) = \frac{Q(\omega_k)}{P_0^1(\omega_k)}$$

se denomina el precio de estado de ω_k y el vector $d = (d_1, \ldots, d_k) \in \mathbb{R}^n$ el vector de precios de estado.

Así, para todo pago alcanzable H,

$$\pi(H) = d \cdot H$$

1.1.4 Mercados completos e incompletos

Supongamos que $\mathbb{M} \neq \emptyset$.

Definición 1.1.21 *Diremos que el mercado es completo si todo pago es alcanzable.*

Proposición 1.1.22 *Supongamos que no hay oportunidades de arbitraje en el mercado. Entonces son equivalentes:*

1. *El mercado es completo.*
2. $n = \text{rango}\Big(P_j^1(\omega_k)\Big)_{\substack{k=1,\ldots,n \\ j=0,\ldots,d}} \in \mathcal{M}_{n\times(d+1)}$.

El resultado clave de esta sección se basa en una versión del lema de Farkas, una variante de los teoremas de separación.

Lema 1.1.23 (de Farkas) *Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $b \in \mathcal{M}_{m\times 1}$. Entonces se cumple una, y sólo una, de las siguientes propiedades:*

i) El sistema $Ax = b$ tiene una solución $x \geq 0$.

ii) Existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $yA \leq 0$ e $yb > 0$.

Teorema 1.1.24 *Un pago $H \in \mathbb{R}^n$ es alcanzable si y sólo si $E_Q[\frac{H}{P_0^1}]$ toma el mismo valor cualquiera que sea $Q \in \mathbb{M}$.*

Corolario 1.1.25 *El mercado es completo si y sólo si $\mathbb{M}$ es unitario.*

1.1.5 Valoración en mercados incompletos

A lo largo de esta sección supondremos que H no es un pago alcanzable.

Definición 1.1.26 *Si H no es replicable definimos*

$$V_+(H) = \inf\Big\{E_Q\Big[\frac{K}{P_0^1}\Big] : K \geq H, K \text{ alcanzable}\Big\}.$$

El valor $V_+(H)$ está bien definido, es finito y

$$V_+(H) \geq \sup\Big\{E_Q\Big[\frac{H}{P_0^1}\Big] : Q \in \mathbb{M}\Big\}.$$

Definición 1.1.27 *Si H no es replicable definimos*

$$V_-(H) = \sup\Big\{E_Q\Big[\frac{K}{P_0^1}\Big] : K \leq H, K \text{ alcanzable}\Big\}.$$

Análogamente, $V_-(H)$ es un valor bien definido, finito y

$$V_-(H) \leq \inf\Big\{E_Q\Big[\frac{H}{P_0^1}\Big] : Q \in \mathbb{M}\Big\}.$$

El precio (o precios) justos por arbitraje de H deben pertenecer al intervalo

$$[V_-(H), V_+(H)]$$

Recordemos que $\mathbb{M} = L^\perp \cap \mathbb{P}^+$. Supongamos que $\dim(L^\perp) = J$ (luego, $\dim(L) = n - J$) y elijamos una base $\{Q_1, \ldots, Q_J\}$ de $L^\perp$ formada por elementos de $\mathbb{M}$. En consecuencia,

$$L = \{y \in \mathbb{R}^n : y \cdot Q_j = 0, \text{ para todo } j = 1, \cdots, J\}.$$

Observemos que K es un pago alcanzable de precio λ en $t = 0$ si y sólo si existe $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ tal que $\lambda = P^0 \cdot x = E_{Q_j}[\frac{P^1 \cdot x}{P_0^1}]$ para todo $j = 1, \ldots, J$, esto es, $E_{Q_j}[\frac{P^1 \cdot x}{P_0^1} - P^0 \cdot x] = 0$ para todo $j = 1, \ldots, J$. Luego, K es un pago alcanzable de precio λ en $t = 0$ si y sólo si $Y - \lambda(1, \ldots, 1) \in L$, siendo $Y = \frac{K}{P_0^1}$. Pero, $Q_j \cdot (1, \ldots, 1) = 1$ para todo $j = 1, \ldots, J$, así que K es un pago alcanzable de precio λ en $t = 0$ si y sólo si $Y \cdot Q_j - \lambda = 0$ para todo $j = 1, \ldots, J$, siendo $Y = \frac{K}{P_0^1}$. Por consiguiente el problema de encontrar el pago alcanzable K con $K \geq H$ de precio menor en $t = 0$ puede expresarse mediante el programa lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \lambda \\ \text{sujeto a:} & \left\{\begin{array}{l} K \geq H \\ Y - \frac{K}{P_0^1} = 0 \\ \lambda - Y \cdot Q_1 = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \lambda - Y \cdot Q_J = 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{R}^n \end{array}\right. \end{array} \qquad (P+)$$

Este programa es resoluble porque el conjunto de soluciones factibles no es vacío y la función objetivo está acotada inferiormente. Si (λ^*, K^*, Y^*) es una solución óptima de $(P+)$ entonces $V_+(H) = \lambda^*$ y K^* es un pago alcanzable cuyo precio en $t = 0$ es $V_+(H)$.

Analicemos ahora el dual del programa $(P+)$ que puede expresarse como

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{H(\omega_k)}{P_0^1(\omega_k)}\Big)\psi_k \\ \text{sujeto a:} & \left\{\begin{array}{l} \theta_1 + \cdots + \theta_J = 1 \\ \psi_1 - (Q_1(\omega_1)\theta_1 + \cdots + Q_J(\omega_1)\theta_J = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \psi_n - (Q_1(\omega_n)\theta_1 + \cdots + Q_J(\omega_n)\theta_J = 0 \\ \psi \in \mathbb{R}^n, \psi \geq 0, \theta \in \mathbb{R}^J \end{array}\right. \end{array} \qquad (D+)$$

Fijémonos en que si (ψ, θ) es una solución factible entonces $\psi = \theta_1 Q_1 + \cdots + \theta_J Q_J \geq 0$. Además, $(1, \dots, 1) \cdot \psi = \theta_1 + \cdots + \theta_J = 1$, pues cada Q_j es una medida de probabilidad, por lo que ψ es también una medida de probabilidad. Finalmente,

$$E_\psi[\bar{P}^1 - P^0] = \theta_1 E_{Q_1}[\bar{P}^1 - P^0] + \cdots + \theta_J E_{Q_J}[\bar{P}^1 - P^0] = 0.$$

Así pues, ψ es una regla lineal de valoración (que no es necesariamente una m.m.e. a μ). Luego, la región factible del problema $(D+)$ es la clausura de $\mathbb{M}$. Naturalmente, el valor óptimo de la función objetivo es igual a $\sup\{E_Q[\frac{H}{P_0^1}] : Q \in \mathbb{M}\}$.

Por supuesto, los argumentos anteriores pueden repetirse para el caso de $V_-(H)$. En virtud de la teoría de dualidad de la programación lineal se obtiene el siguiente resultado de vital importancia.

Teorema 1.1.28 *Si $\mathbb{M} \neq \emptyset$ entonces dado cualquier pago H se tiene que:*

1. $V_+(H) = \sup\Big\{E_Q\Big[\dfrac{H}{P_0^1}\Big] : Q \in \mathbb{M}\Big\}$

2. $V_-(H) = \inf\Big\{E_Q\Big[\dfrac{H}{P_0^1}\Big] : Q \in \mathbb{M}\Big\}$

RESUMEN

- $T = \{0, 1\}$
- (Ω, Σ, μ) incertidumbre
- $d + 1$ activos de precios P^0, P^1. Uno de los activos es un depósito bancario.
- $x = (x_0, x_1, \dots, x_d)$ carteras de activos.
- $H = (H_1, \dots, H_n)$ pago en $t = 1$.

Ausencia de arbitraje $\Leftrightarrow$ existencia de una m.m.e. a μ

Valoración:

$$\pi(H) = E_Q\left[\frac{H}{P_0^1}\right]$$

1.1.6 Riesgo y rentabilidad

Supongamos que $P_j^0 > 0$ para todo $j = 0, \ldots, d$.

Definición 1.1.29 *La rentabilidad del j-ésimo activo, $j = 0, \ldots, d$, viene dada por la variable aleatoria $R_j = \dfrac{P_j^1 - P_j^0}{P_j^0}$.*

Así pues, $P_j^1 = (1 + R_j)P_j^0$ para todo $j = 0, \ldots, d$; en particular, la rentabilidad del bono se conoce como el tipo de interés y se denota por $r = R_0 = P_0^1 - 1$.

Es fácil comprobar que

$$(P^1 - P^0) \cdot x = \sum_{j=0}^{d} x_j (P_j^0 R_j)$$

para $x \in \mathbb{R}^{d+1}$.

Proposición 1.1.30 *Si Q es una medida de probabilidad en Ω equivalente a μ, entonces son equivalentes:*

1. $Q \in \mathbb{M}$
2. $E_Q\left[\dfrac{R_j - R_0}{1 + R_0}\right] = 0$ *para todo* $j = 0, \ldots, d$.

En lo sucesivo supondremos que el tipo de interés $r \in \mathbb{R}$. Así, si Q es una medida de probabilidad equivalente a μ entonces

$$E_Q\left[\frac{R_j - r}{1 + r}\right] = \frac{1}{1 + r}(E_Q[R_j] - r), \text{ para todo } j = 0, \ldots, d.$$

Corolario 1.1.31 *Si Q es una medida de probabilidad en Ω equivalente a μ y el tipo de interés r es determinista entonces son equivalentes:*

1. $Q \in \mathbb{M}$
2. $r = E_Q[R_j] = 0$ *para todo* $j = 0, \ldots, d$.

Supongamos que $\mathbb{M} \neq \emptyset$ y sea $Q \in \mathbb{M}$.

Definición 1.1.32 *Llamaremos densidad de precios de estado asociada a Q a la variable aleatoria L dada por*

$$L(\omega_k) = \frac{Q(\omega_k)}{\mu(\omega_k)}, \; k = 1, \ldots, n.$$

Es fácil comprobar que $E[L] = 1$ y que $E[y] = E_Q[\frac{y}{L}]$ para $y \in \mathbb{R}^n$. En particular, $E[R_j L] = E_Q[R_j] = r$. Si para cada $j = 0, \ldots, d$ denotamos por $\bar{R}_j = E[R_j]$ entonces

$$\operatorname{cov}(R_j, L) = r - \bar{R}_j \tag{1.3}$$

Definición 1.1.33 *Llamaremos prima de riesgo del activo $j = 1, \ldots, d$ al valor $\bar{R}_j - r$.*

Dada una cartera $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ de precio $P^0 \cdot x > 0$ en $t = 0$, definimos su rentabilidad como la variable aleatoria

$$R_x = \frac{P^1 \cdot x - P^0 \cdot x}{P^0 \cdot x}.$$

Es fácil comprobar que, de nuevo,

$$-\operatorname{cov}(R_x, L) = \bar{R}_x - r \tag{1.4}$$

ya que $P^1 \cdot x - P^0 \cdot x = (P^0 \cdot x) R_x$ y

$$R_x = \sum_{j=0}^{d} \frac{P_j^0 x_j}{P^0 \cdot x} R_j.$$

En particular, $E_Q[R_x] = r$.

Teorema 1.1.34 *Supongamos que el tipo de interés es determinista $r \in \mathbb{R}$. Si $a + bL$, con $a, b \in \mathbb{R}$, es un pago alcanzable y la cartera $x^* \in \mathbb{R}^{d+1}$ es una réplica de L con rentabilidad $R_L = R_{x^*}$, entonces*

$$\bar{R}_x - r = \beta(\bar{R}_L - r)$$

donde $x \in \mathbb{R}^{d+1}$, $P^0 \cdot x > 0$ y

$$\beta = \frac{\operatorname{cov}(R_x, R_L)}{\operatorname{var}(R_L)}$$

MÉTODOS DE VALORACIÓN

Dado un pago alcanzable H en $t = 1$, ¿Cómo calculamos su precio en $t = 0$?

- **Réplica:** Si $P^1 \cdot x = H$

$$\boxed{\pi(H) = P^0 \cdot x}$$

- **m.m.e. a μ:** Si Q es una m.m.e. a μ

$$\boxed{\pi(H) = \frac{1}{1+r} E_Q[H]}$$

- **Precios de estado:** Si Q es una m.m.e. a μ y $d = \frac{Q}{1+r}$

$$\boxed{\pi(H) = d \cdot H}$$

- **Densidad de precios de estado:** Si Q es una m.m.e. a μ y $f = \frac{Q}{\mu}$

$$\boxed{\pi(H) = \frac{1}{1+r} E_\mu[fH]}$$

Reflexionemos acerca de las hipótesis económicas que subyacen en estos modelo teóricos:

- La hipótesis de no-arbitraje.
- Tipos de interés.
- Ventas al descubierto y uso total de los beneficios.
- Negociación discreta.
- Liquidez.
- Costes de transacción.
- Horquilla de precios.
- Dividendos.

1.1.7 Integración de mercados

Dedicaremos esta sección a estudiar distintas formas de medir el grado de integración de dos mercados financieros. Pretendemos evaluar hasta que punto dos mercados financieros distintos valoran consistentemente los activos que les son comunes.

En el artículo Chen and Knez (1995), estos autores desarrollan una teoría para medir la integración de mercados financieros basada en dos nociones de eficiencia. Primero, dos mercados no pueden estar perfectamente integrados si es posible negociar dos carteras de activos, una en cada mercado, que proporcionen idénticos pagos y tengan distintos precios. En tal caso, la LOP no se cumpliría a lo largo de ambos mercados. Segundo, dos mercados no pueden estar integrados en un sentido más fuerte si existen oportunidades de arbitraje entre ellos.

Imaginémonos pues dos mercados finitos de un período M_A y M_B que verifican por separado la LOP. En virtud de la caracterización dada en la proposición 1.1.8 los siguientes conjuntos no son vacíos y, además, son cerrados y convexos:

$$D_A = \{q_A \in \mathbb{R}^n : q_A \text{ factor de descuento estocástico admisible para el mercado } A\}$$
$$D_B = \{q_B \in \mathbb{R}^n : q_B \text{ factor de descuento estocástico admisible para el mercado } B\}$$

Definición 1.1.35 *Diremos que los mercados A y B están perfectamente integrados en el sentido débil si $D_A \cap D_B \neq \emptyset$. La medida de integración débil entre los mercados A y B viene dada por:*

$$g(A, B) = \min\{\|q_A - q_B\|^2 : q_A \in D_A, q_B \in D_B\} \tag{1.5}$$

Naturalmente, A y B están perfectamente integrados en el sentido débil si y sólo si $g(A, B) = 0$.

Supongamos ahora que en los mercados M_A y M_B por separado no hay oportunidades de arbitraje. Por el teorema fundamental sabemos que los siguientes conjuntos no son vacíos y, además, son convexos:

$$D_A^{++} = \{d_A \in \mathbb{R}^n : d_A \text{ precio de estado para el mercado } A\}$$
$$D_B^{++} = \{d_B \in \mathbb{R}^n : d_B \text{ precio de estado para el mercado } B\}$$

Denotemos por D_A^+ y D_B^+ las clausuras de D_A^{++} y D_B^{++} respectivamente.

Definición 1.1.36 *Diremos que los mercados A y B están perfectamente integrados en el sentido fuerte si $D_A^+ \cap D_B^+ \neq \emptyset$. La medida de integración fuerte entre los mercados A y B viene dada por:*

$$a(A, B) = \min\{\|q_A - q_B\|^2 : q_A \in D_A^+, q_B \in D_B^+\} \tag{1.6}$$

Naturalmente, A y B están perfectamente integrados en el sentido fuerte si y sólo si $a(A, B) = 0$.

Estas medidas de integración pueden aplicarse en, al menos, dos áreas. La primera tiene que ver con la comprobación empírica de la eficiencia entre mercados. La segunda está relacionada con la verificación de los modelos de valoración. Estas medidas proporcionan una herramienta para comprobar la consistencia interna de los precios de un conjunto de datos antes de que les apliquemos un modelo de valoración.

Como ejemplo, Chen and Knez (1995) analizan el grado de integración del NYSE y el NASDAQ en el período comprendido entre los años 1973 y 1991. Estos dos mercados están abiertos durante las mismas horas cada día y si apostásemos por un par de mercados que debieran estar perfectamente integrados, estos dos estarían sin duda en casi todas las quinielas. Los resultados obtenidos sugieren que estos dos mercados están próximos a la integración débil pero no están fuertemente integrados.

1.1.8 Medidas de arbitraje

Siguiendo la línea iniciada por Balbás and Muñoz-Bouzo (1998) y Balbás et al. (1998), desarrollaremos una teoría de la medida del arbitraje en mercados financieros basada en la idea central de medir el máximo beneficio relativo que un inversor podría alcanzar en un mercado en el que haya oportunidades de arbitraje. El hecho de medir en términos monetarios relativos nos permitirá estudiar en el próximo epígrafe, como alternativa al trabajo de Prisman (1986), si el arbitraje sigue siendo posible después de descontar los costes de transacción: impuestos, tasas, pagos a intermediarios...

REQUISITOS IMPRESCINDIBLES EN CUALQUIER MEDIDA:

1. Debe caracterizar la ausencia de arbitraje
2. Debe tener en cuenta todas las posibles estrategias de arbitraje

OTRAS PROPIEDADES “ADICIONALES”:

1. Que mida el arbitraje en términos monetarios relativos
2. Que sea fácil de calcular en la práctica
3. Que pueda aplicarse en condiciones muy generales
4. Que sea continua con respecto a los precios de los activos

1ª alternativa: Beneficio por unidad de activos vendidos

El máximo beneficio alcanzable por arbitraje, con relación al precio de los activos vendidos, vendría dado por el valor del siguiente programa:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & f(x) \\ \text{sujeto a:} & P^1 \cdot x \geq 0 \end{array} \qquad (IV)$$

donde, para cada cartera $x \in \mathbb{R}^{d+1}$,

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{P^0 \cdot x}{P^0 \cdot x^-} & \text{si } P^0 \cdot x^- \neq 0 \\ 0 & \text{si } P^0 \cdot x^- = 0 \end{cases}.$$

2ª alternativa: Beneficio por unidad de activos intercambiados

Claramente, $P^0 \cdot |x|$ representa la cantidad total de dinero intercambiado al negociar la cartera $x \in \mathbb{R}^{d+1}$. Definimos la función $g\colon \mathbb{R}^{d+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$g(x) = \begin{cases} -\dfrac{P^0 \cdot x}{P^0 \cdot |x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Para estudiar el mayor beneficio, con respecto al valor de todos los activos intercambiados, que un inversor podría llegar a alcanzar negociando con carteras de pago positivo, nos planteamos el siguiente programa:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & g(x) \\ \text{sujeto a:} & P^1 \cdot x \geq 0 \end{array} \qquad (V)$$

3ª alternativa: Beneficio por unidad en la dotación inicial de los activos

Supongamos que cada inversor posee una cartera $h = (h_0, h_1, \ldots, h_d) \in \mathbb{R}_+^{d+1}$ de precio de venta unitario, $P^0 \cdot h = 1$, y que el mercado no le permite vender cantidades de cada activo superiores a las que tienen inicialmente.

En este caso, la estrategia que generaría más beneficios por arbitraje sería aquella que fuese solución del siguiente programa convexo:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & -P^0 \cdot x \\ \text{sujeto a:} & \begin{cases} P^1 \cdot x \geq 0 \\ x_j \geq -h_j, \ j = 0, \ldots, d \\ P^0 \cdot h = 1 \\ h_j \geq 0, \ j = 0, \ldots, d \end{cases} \end{array} \qquad (III)$$

Proposición 1.1.37 *El problema (III) es resoluble. Además, si (x^*, h^*) es cualquier solución óptima de (III) entonces x^* es una solución óptima de los problemas (IV) y (V). Además,*

$$f(x^*) = -P(x^*)$$

y

$$g(x^*) = \frac{f(x^*)}{2 - f(x^*)}.$$

Definición 1.1.38 *Definimos dos medidas del nivel de oportunidades de arbitraje en el mercado mediante:*

$$m = -P^0 \cdot x^* = f(x^*)$$

y

$$l = g(x^*) = \frac{m}{2 - m}.$$

Se verifican las siguientes propiedades:

1. $0 \leq l \leq m \leq 1$.

2. No hay carteras dominantes en el mercado si y sólo si $l = m = 0$.

3. Las medidas m y l son continuas con respecto a los precios de los activos.

El problema dual de (III) es equivalente al programa (DL) dado por:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \beta \\ \text{sujeto a:} & \begin{cases} P_j^0 = \lambda_j + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P_j^1(\omega_k) d_k \mu_k \; j = 0, \ldots, d \\ P_j^0 \beta - \lambda_j \geq 0 \\ \beta \geq 0, \; d \geq 0, \; \lambda \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Dada $(d, \beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ una solución factible de (DL), podemos interpretar d como un "factor de descuento aproximado", de tal manera que:

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P_j^1(\omega_k) d_k \mu_k$, sería el "precio aproximado" para el j-ésimo activo.
- $\lambda_j = P_j^0 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P_j^1(\omega_k) d_k \mu_k$, nos daría el error cometido al valorar el activo j-ésimo mediante d.
- $\dfrac{\lambda_j}{P_j^0}$, correspondería al error cometido por unidad monetaria.
- β, es una cota superior del máximo error cometido al valorar los $d+1$ activos.

Así pues, el problema (DL) trata de buscar los "factores de descuento aproximados" $d \in \mathbb{R}_+^n$ que minimicen el máximo error por unidad monetaria cometido al valorar los activos con esos factores. Debido a que no hay hueco de dualidad, ese error viene dado por la medida m y volvemos a obtener la caracterización de la ausencia de carteras dominantes dada por la proposición 1.1.5.

Retomamos el problema de la integración de mercados que abordamos en la sección anterior. Supongamos que los primeros $q < d$ activos se negocian en un mercado M_A y los restantes $d - q$ en un mercado M_B. Por supuesto, el bono está disponible en ambos mercados. Si no hay carteras dominantes en ninguno de los dos sub-mercados por separado, los conjuntos D_A y D_B de las reglas lineales de valoración para M_A y M_B, respectivamente, no son vacíos. Denotemos por $M = M_1 + M_2$ el mercado conjunto. Las medidas m y l que acabamos de definir pueden utilizarse para medir el nivel de integración de los mercados M_A y M_B sin más que calcular su valor en el mercado conjunto M. La relación con la medida de integración fuerte que hemos definido viene dada por el siguiente resultado.

Teorema 1.1.39 *Se verifica que:*

$$0 \leq l \leq m \leq \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{d} \frac{||P_j^1||}{P_j^0} \sqrt{a(M_A, M_B)}.$$

1.2 Modelos de mercados multiperíodo

los modelos multiperíodo de mercados financieros son mucho más realistas que los de período único que acabamos de estudiar. De hecho, se emplean habitualmente por los profesionales de la industria financiera.

1.2.1 Arbitraje

1. **Fechas de negociación:** $\mathbb{T} = \{0, \ldots, T\}$

2. **Incertidumbre:** Un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

3. **Estructura de la información:** Una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$.

$$\{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_T = \mathcal{F}$$

4. **Activos:** Un número finito de activos $d+1$, $d \in \mathbb{N}$. El activo de índice 0 es el numerario.

5. **Precios de los activos:** Un proceso estocástico $P = \{P^t\}_{t\in\mathbb{T}}$ con valores en $\mathbb{R}^{d+1}$ adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$.

$$\begin{array}{rcl} P^t\colon \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^{d+1} \\ \omega & \rightsquigarrow & P^t(\omega) = (P_0^t(\omega), \ldots, P_d^t(\omega)) \end{array}$$

$P_j^t(\omega) \equiv$ precio del j-ésimo activo en t si el estado de la naturaleza es ω.

Para cada $t \in \mathbb{T}$, P^t es $\mathcal{F}_t$-medible.

Para el activo numerario: $P_0^t = 1,\ t \in \mathbb{T}$.

Diremos que el mercado

$$\big(\mathbb{T}, (\Omega, \mathcal{F}, \mu), \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}, d \in \mathbb{N}, P = \{P^t\}_{t\in\mathbb{T}}\big)$$

es FINITO si

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$$

con $\mu_k = \mu(\omega_k) > 0$ para todo $k = 1, \ldots, n$.

Estrategias de inversión o carteras de activos

Una cartera de activos o una estrategia de un inversor es un proceso estocástico

$$\theta = \{\theta^t\}_{t=1}^T$$

con valores en $\mathbb{R}^{d+1}$ predecible. Esto es, para cada $t \in \{1, \ldots, T\}$,

$$\begin{array}{rcl} \theta^t \colon \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^{d+1} \\ \omega & \rightsquigarrow & \theta^t(\omega) = (\theta_0^t(\omega), \ldots, \theta_d^t(\omega)) \end{array}$$

$\theta_j^t(\omega) \equiv$ la cantidad del activo j que el inversor negocia en el instante de tiempo $t-1$, y que mantiene sin cambio en $[t-1, t)$, si el estado de la naturaleza que se revela es ω.

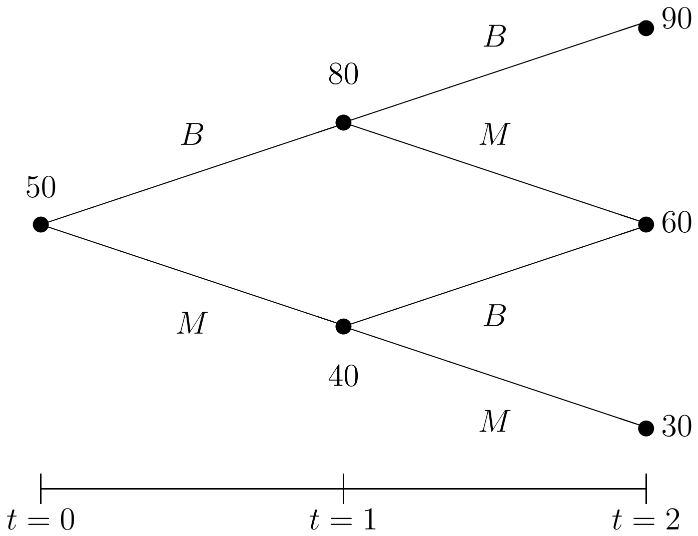
Para cada $t \in \{1, \ldots, T\}$, θ^t es $\mathcal{F}_{t-1}$-medible.

Dado un proceso estocástico $X = \{X^t\}_{t \in \mathbb{T}}$ denotaremos por

$$\Delta X^t = X^t - X^{t-1}, \;\; t \in \{1, \ldots, T\}.$$

Dada una estrategia $\theta = \{\theta^t\}_{t=1}^T$ definimos el **proceso de valor** $\{V^t(\theta)\}_{t=0}^T$ mediante:

$$V^t(\theta) = \begin{cases} \theta^1 P^0 & \text{si } t = 0 \\ \theta^t P^t & \text{si } t \in \{1, \ldots, T\} \end{cases}.$$



$$\Omega = \{BB, BM, MB, MM\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &= \{\emptyset, \Omega\} \\ \mathcal{F}_1 &= \sigma(\{B, M\}) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} B =& \{BB, BM\} \\ M =& \{MB, MM\} \end{aligned}$$

y

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$$

Una estrategia autofinanciada es aquella que precisa sólo de una inversión inicial y que, en los demás instantes de tiempo, financia la cartera en el tiempo t con los pagos recibidos por la cartera del instante $t-1$.

Definición 1.2.1 *Una estrategia $\theta = \{\theta^t\}_{t=1}^T$ es autofinanciada si $\Delta\theta^t P^{t-1} = 0$ para todo $t = 2, \ldots, T$.*

Denotaremos por Θ la clase de todas las estrategias autofinanciadas.

Definición 1.2.2 *Una estrategia $\theta = \{\theta^t\}_{t=1}^T \in \Theta$ es admisible si $V^t(\theta) \geq 0$ para todo $t = 0, \ldots, T$. Denotaremos por Θ_a la clase de todas las estrategias autofinanciadas admisibles.*

El concepto de arbitraje es la noción clave.

Definición 1.2.3 *Una oportunidad de arbitraje es una estrategia admisible*

$$\theta = \{\theta^t\}_{t=1}^T \in \Theta_a$$

tal que $V^0(\theta) = 0$ y $E[V^T(\theta) > 0] > 0$.

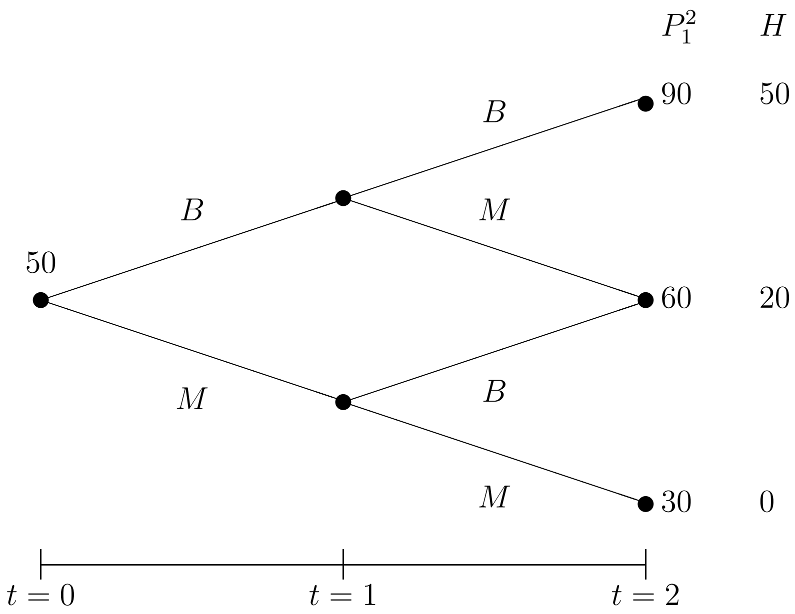
Definición 1.2.4 *El modelo del mercado es viable si no contiene oportunidades de arbitraje.*

Definición 1.2.5 *Un contrato ("contingent claim") es una función $H \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que H es $\mathcal{F}$-medible y $H \geq 0$. Un contrato es alcanzable si existe $\theta \in \Theta_a$ que replica a H, es decir, $V^T(\theta) = H$.*

En un mercado viable los pagos alcanzables admiten un "precio justo" en $t = 0$.

$$\pi(H) = V^0(\theta),$$

siendo $\theta \in \Theta_a$ cualquier réplica de H.



Una opción CALL europea sobre el activo de riesgo es un contrato que da derecho al poseedor a comprar una unidad de dicho activo en el instante $t = 2$ al precio de ejercicio $K = 40$.

$H = \max\{P_1^2 - 40, 0\} = (50, 20, 20, 0)$ es un pago alcanzable. La estrategia que lo replica es:

$$\theta^0 = (-\frac{80}{3}, \frac{25}{3})$$
$$\theta^1(B) = (-40, 10)$$
$$\theta^1(M) = (-20, \frac{20}{3})$$

El valor por arbitraje del contrato H sería:

$$\pi(H) = V^0(\theta) = -\frac{80}{3} + 50\frac{25}{3} = 15$$

1.2.2 Martingalas y valoración

Recordaremos el concepto de martingala, un modelo estadístico que representa un juego "justo".

Definición 1.2.6 *Un proceso estocástico* $M = \{M_t\}_{t=0}^{T}$ *con valores en* $\mathbb{R}$ *adaptado a la filtración* $\{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^{T}$ *es una martingala si:*

1. $E[|M_t|] < +\infty$ *para todo* $t \in \mathbb{T}$.
2. $E[M_{t+1}|\mathcal{F}_t] = M_t$ *para todo* $t \in \{0, \ldots, T-1\}$.

Definición 1.2.7 *Una medida de probabilidad* Q *sobre* $\mathcal{F}$ *es una m.m.e. a* μ *si:*

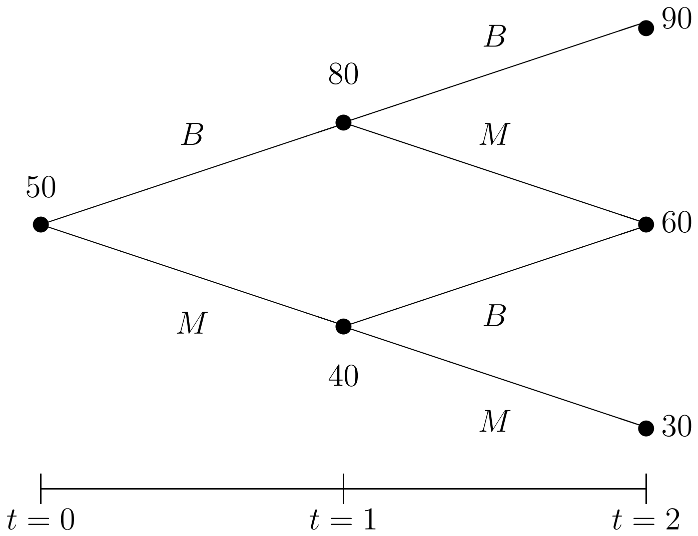
1. Q *es equivalente a* μ.
2. *El proceso de precios* $S = \{P^t\}_{t=0}^{T}$ *es una martingala con respecto a* Q.

El siguiente resultado es válido incluso si el mercado no es finito.

Proposición 1.2.8 *Si existe una medida de martingala* Q *equivalente a* μ *entonces el mercado es viable.*

Naturalmente, si Q es una m.m.e. a μ y H es un pago alcanzable entonces

$$\pi(H) = E_Q[H].$$



Una medida de martingala $Q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ en nuestro mercado será cualquier solución estrictamente positiva del sistema:

$$\left.\begin{aligned} 50 &= 80(q_1+q_2) + 40(q_3+q_4) \\ 50 &= 90q_1 + 60q_2 + 60q_3 + 30q_4 \\ 80 &= 90\tfrac{q_1}{q_1+q_2} + 60\tfrac{q_2}{q_1+q_2} \\ 40 &= 60\tfrac{q_3}{q_3+q_4} + 30\tfrac{q_4}{q_3+q_4} \\ 1 &= q_1+q_2+q_3+q_4 \end{aligned}\right\}$$

El mercado es viable pues este sistema tiene una única solución $Q = (\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. El precio de la opción $H = (50, 20, 20, 0)$ viene dado por:

$$\pi(H) = 50\frac{1}{6} + 20\frac{1}{12} + 20\frac{1}{4} + 0\frac{1}{2} = 15.$$

1.2.3 El teorema fundamental de la valoración de activos

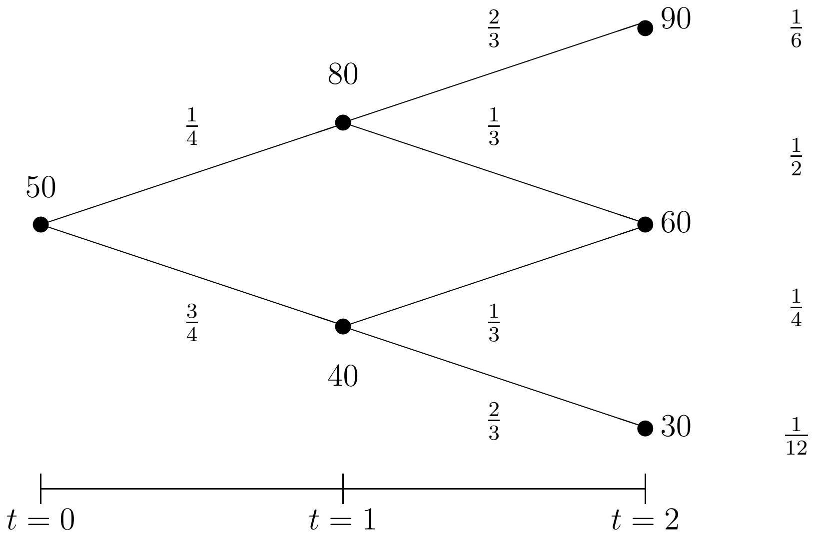
El teorema fundamental de la valoración de activos simplemente establece que la existencia de una medida de martingala equivalente a la probabilidad base no sólo es una condición necesaria sino también suficiente para que un mercado, no necesariamente finito, sea viable. El primer resultado parcial se debe a Taqqu and Willinger (1987) quienes probaron el teorema fundamental cuando el conjunto de estados de la naturaleza Ω es finito. Más tarde, Back and Pliska (1988) demostraron el teorema para un espacio de estados arbitrario pero considerando sólo dos activos: el numerario y un activo con riesgo. Desafortunadamente, la técnica no puede extenderse a más activos. Finalmente, Dalang et al. (1990) obtuvieron una demostración completa del teorema fundamental. Desde entonces, muchos autores han aportado demostraciones más simples o utilizando distintas herramientas matemáticas del teorema fundamental, por ejemplo, Schachermayer (1992); Rogers (1994); Kabanov and Kramkov (1994); Jacod and Shiryaev (1998). Cuando se consideran o bien un número infinito de activos, Schachermayer (1992), o de fechas, Back and Pliska (1991), el teorema en su formulación clásica no es válido. No obstante, debilitando la condición de no arbitraje o imponiendo ciertas restricciones adicionales es posible demostrar versiones del teorema fundamental en tiempo continuo. Citemos, como muestra, Schachermayer (1994); Delbaen and Schachermayer (1998); Pham and Touzi (1999).

La demostración que haremos se basa en una construcción de la medida de martingala paso a paso apoyándonos en la idea de que el arbitraje "global" es equivalente al arbitraje "local".

Definición 1.2.9 *Dado $t \in \{1, \ldots, T\}$, diremos que una función $\mathcal{F}_{t-1}$-medible $\psi \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ es una oportunidad de arbitraje entre $t-1$ y t si $\psi P^{t-1} > 0$.*

Teorema 1.2.10 (El teorema fundamental de la valoración de activos)
En un mercado finito las siguientes condiciones son equivalentes.

1. *El modelo es viable.*
2. *Para todo $t \in \{1, \ldots, T\}$ No hay oportunidades de arbitraje entre $t-1$ y t.*
3. *Existe Q una medida de martingala equivalente a P.*



Las martingalas “locales” se obtienen de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 50 &= 80x + 40(1-x) \\ 80 &= 90y + 60(1-y) \\ 40 &= 60z + 30(1-z) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \\ q_2 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \\ q_3 &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \\ q_4 &= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

RESUMEN

$$\big(\mathbb{T}, (\Omega, \mathcal{F}, \mu), \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}, d \in \mathbb{N}, P = \{P^t\}_{t\in\mathbb{T}}\big)$$

Estrategias: $\theta = \{\theta^t\}_{t=1}^T$

Son equivalentes:

- Ausencia de arbitraje
- Existencia de una m.m.e. a μ
- Ausencia de arbitraje en cada período

MÉTODOS DE VALORACIÓN

Dado un pago alcanzable H en T, ¿Cómo calculamos su precio en $t = 0$?

- **Réplica:** Si $V^T(\theta) = H$

$$\boxed{\pi(H) = V^0(\theta)}$$

- **m.m.e. a μ:** Si Q es una m.m.e. a μ

$$\boxed{\pi(H) = \frac{1}{(1+r)^T} E_Q[H]}$$

- **medidas de martingala “locales”:** Valoramos en cada período $[t, t+1]$ utilizando las martingalas “locales”.

1.2.4 El modelo binomial

El modelo más versátil y difundido de las fluctuaciones de los precios de una acción y de la valoración de opciones es el modelo binomial. Los propios autores John Cox, Stephen Ross y Mark Rubinstein, véase Cox et al. (1979), no podían siquiera sospechar la popularidad que alcanzaría. Ello es debido a que el modelo es simple y fácil de entender, sin recurrir a técnicas matemáticas de alto nivel como el cálculo estocástico, siendo a la vez una herramienta poderosa para la valoración de una amplia variedad de opciones. El modelo binomial es un modelo en tiempo discreto finito mientras que el modelo del movimiento browniano geométrico es un modelo en tiempo continuo.

Comenzaremos estudiando el caso más sencillo, el modelo binomial en un único período.

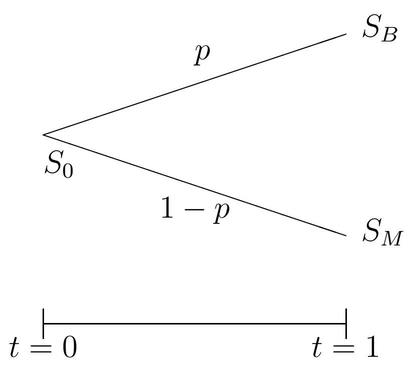


Figura 1.3: El modelo binomial de un único período.

Supondremos entonces que sólo hay dos fechas de negociación $T = \{0, 1\}$ y que tenemos dos activos: un bono y una acción. El precio del bono A_0 y de la acción S_0 en el instante inicial son conocidos. El bono crece de forma determinista a un tipo de interés r. La incertidumbre en el precio de la acción en el instante $t = 1$ se modela suponiendo que o bien asciende a S_B si ha ocurrido un día "Bueno" o bien se deprecia a S_M ($S_M < S_B$) si el día ha sido "Malo". Esto es, consideramos el espacio de probabilidad finito $\Omega = \{B, M\}$ con probabilidades $P(B) = p$ y $P(M) = 1 - p$. Una cartera de activos es, simplemente, un vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donde x representa el número de unidades del bono compradas si $x > 0$ o vendidas si $x \leq 0$ e y indica el número de unidades de la acción compradas si $y > 0$ o vendidas si $y \leq 0$. Así, el precio de la cartera (x, y) en el instante inicial $t = 0$ es $A_0x + S_0y$ y su valor en $t = 1$ es la variable aleatoria dada por el vector $(A_0(1+r)x + S_By, A_0(1+r)x + S_My)$, donde la primera componente es el precio en un día bueno y la segunda el precio en un día malo.

Diremos que no hay oportunidades de arbitraje en el modelo si no es posible encontrar una cartera (x, y) que produzca beneficios en el instante inicial y no dé pérdidas en el instante final cualquiera que sea el estado de la naturaleza que se revele. Es decir, la ausencia de arbitraje equivale a que el sistema de inecuaciones

$$\left.\begin{aligned} A_0x + S_0y &\leq 0 \\ A_0(1+r)x + S_By &\geq 0 \\ A_0(1+r)x + S_My &\geq 0 \end{aligned}\right\}$$

no tenga solución distinta de la trivial.

Un contrato que vence en $t = 1$ es una variable aleatoria $H = (H_B, H_M)$. Una cartera (x, y) replica el contrato H si

$$\left.\begin{aligned} A_0(1+r)x + S_By &= H_B \\ A_0(1+r)x + S_My &= H_M \end{aligned}\right\}$$

Demostraremos que la ausencia de arbitraje en el mercado equivale a que $S_M < S_0(1+r) < S_B$. En este caso, todo contrato puede ser replicado; se dice que el mercado es completo. Además, un contrato y cualquiera de sus réplicas deben tener el mismo precio en $t = 0$ que se denomina el precio de arbitraje. En resumen, en ausencia de arbitraje, podremos valorar cualquier contrato.

Es fácil calcular la cartera que replica un contrato $H = (H_B, H_M)$:

$$(x_A, \Delta) = \left(\frac{H_B S_M - H_M S_B}{A_0(1+r)(S_M - S_B)}, \frac{H_B - H_M}{S_B - S_M} \right).$$

El valor por arbitraje de H es

$$\boxed{\pi(H) = \Delta\ S_0 + \frac{H_B S_M - H_M S_B}{S_M - S_B} \frac{1}{1+r}}$$

Los precios de los contratos $H_1 = (1, 0)$ y $H_2 = (0, 1)$ se denominan factores de descuento estocásticos. Así, $d_B = \pi(H_1)$ es el valor actual del derecho a tener una unidad monetaria en $t = 1$ si el día es bueno. Análogamente, $d_M = \pi(H_2)$ es el precio de la posibilidad de tener una unidad monetaria en el instante final si el estado de la naturaleza que se revela es M. A partir de estos valores, se obtiene que el precio de cualquier contrato H se puede expresar como

$$\pi(H) = H_B d_B + H_M d_M.$$

El contrato $A = (1, 1)$ es equivalente a un bono con principal igual a una unidad monetaria. Por lo tanto, $\frac{1}{1+r} = \pi(A) = d_B + d_M$. El vector $q = (q_B, q_M)$, dado por $q_B = d_B(1 + r)$ y $q_M = d_M(1 + r)$, es una distribución de probabilidad en Ω que se denomina probabilidad neutral al riesgo o medida martingala equivalente. El valor de un contrato H puede expresarse de la forma

$$\pi(H) = \frac{1}{1+r} E_q[H],$$

donde E_q es la esperanza con respecto a q.

El precio de una opción Call europea con precio de ejercicio K puede calcularse en este modelo valorando el contrato $C = (C_B, C_M) = \big(\max\{S_B - K, 0\}, \max\{S_M - K, 0\}\big)$. Se obtiene que,

$$\boxed{\pi(C) = \Delta\ S_0 + N \frac{1}{1+r}}$$

donde

$$N = \frac{C_B S_M - C_M S_B}{S_M - S_B} < 0$$

$$\Delta = \frac{C_B - C_M}{S_B - S_M} > 0$$

Luego, la réplica de la opción Call consiste en comprar Δ unidades del subyacente y endeudarse en un bono con principal N.

Naturalmente, el modelo binomial de un único período es muy fácil de extender a un modelo multiperíodo. Se consideran dos activos (el bono y la acción) que se pueden intercambiar en los instantes $0, 1, \dots, T$. El tipo de interés es r y se supone que existen dos valores $b, m \in \mathbb{R}$, con $m < r < b$ para evitar el arbitraje, de tal forma que el precio de la acción toma unos valores $S_0, S_1, \dots, S_T$ tales que $S_t = (1+b)S_{t-1}$ con probabilidad p y $S_t = (1+m)S_{t-1}$ con probabilidad $1-p$.

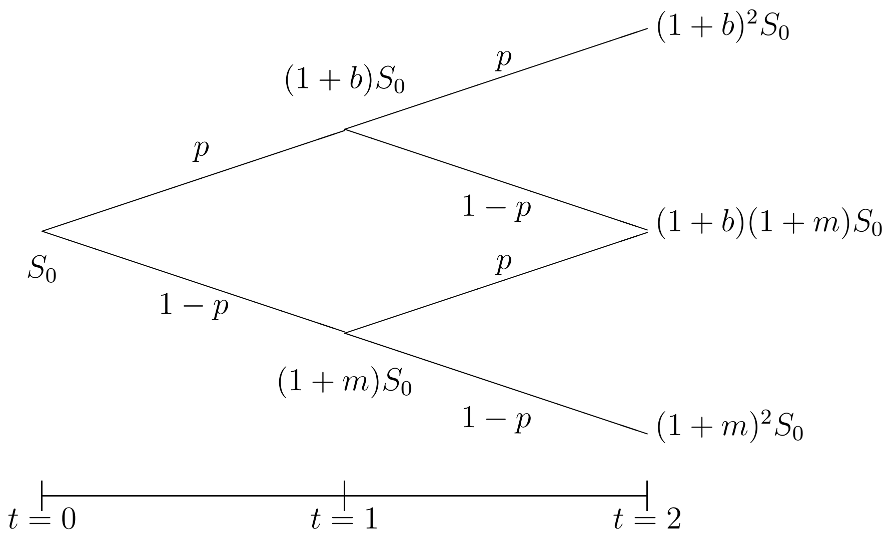


Figura 1.4: El modelo binomial multiperíodo

Ahora es posible valorar un contrato aplicando la técnica de un período en cada trozo del árbol para obtener, hacia atrás, las probabilidades neutrales al riesgo. De este forma, es fácil deducir la fórmula binomial de Cox-Ross-Rubinstein del valor de una opción Call europea con precio de ejercicio K y vencimiento T:

$$\boxed{CA^T = G(E; T, q')S_0 - \frac{1}{(1+r)^T}KG(E; T, q)} \tag{1.7}$$

siendo $q = \frac{r-m}{b-m}$, $q' = q\frac{1+b}{1+r}$, E es el primer natural e tal que

$$S_0(1+b)^e(1+m)^{T-e} > K$$

y G la función de distribución complementaria de una distribución binomial

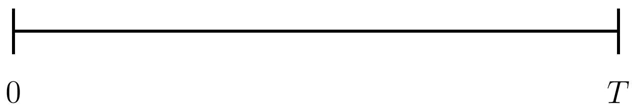
$$G(E; n, p) = \sum_{j=E}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j}.$$

1.3 Tiempo continuo

Intentaremos resaltar las similitudes entre un modelo de un mercado financiero realista, con un espacio de estados $\Omega = [0, +\infty)$ infinito, y los modelos más simples que acabamos de estudiar.

NUESTRO MODELO EN TIEMPO CONTINUO

- **Fechas de negociación:** $\mathbb{T} = [0, T]$



- **Incertidumbre:** $\Omega = [0, +\infty)$
- **Estructura de la información:** Una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$.
- **Activos:**
  - Un depósito bancario a interés continuo: $B^t = B^0 e^{rt}$
  - Un activo con riesgo: P^t denotará su precio en el instante $t \in [0, T]$.

HIPÓTESIS FUNDAMENTAL: No hay arbitraje en el mercado (lo que, bajo ciertas condiciones técnicas, implica la existencia de precios de estado).

1.3.1 Factores de descuento

En un modelo finito de un único período, Ω estaba formado por un número finito de estados y teníamos un número finito de activos cuyos precios eran conocidos. Luego, éramos capaces de calcular los precios de estado sin más que resolver un sistema lineal de ecuaciones. Estos precios de estado estaban pues implícitos en los precios de mercado de los activos.

Las piezas básicas del modelo finito de un período eran los pagos de 1 euro si se daba un particular estado de la naturaleza. De modo análogo, los pagos de una opción dependen del valor del activo subyacente. Así pues, tomaremos como conjunto de los posibles estados de la naturaleza el de los valores que pueda alcanzar el precio del activo subyacente, $\Omega = [0, +\infty)$.

Dado que tenemos un número infinito de estados, tendremos un número infinito de precios de estado, uno por cada $\omega \in [0, +\infty)$; esto es, una variable aleatoria

$$\psi_t \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$\psi_t(\omega)$ representa el precio de estado para el suceso ω en t unidades de tiempo.

OBSERVACIONES:

- Los precios de estado son positivos.
- Los precios de estado dependen de la longitud del intervalo de tiempo.
- El precio de estado para ω depende de las condiciones actuales sólo a través del precio actual del activo, esto es, $\psi_t(\omega) = \psi_{t,P^t}(\omega)$.

En nuestro modelo, para calcular el precio actual de 1 euro seguro en el instante t, tendríamos:

$$\int_0^{+\infty} 1 \cdot \psi_t(\omega) d\omega. \tag{1.8}$$

Naturalmente, el precio de este activo sin riesgo debe coincidir con el valor presente de 1 euro. Por lo tanto, si r es el tipo de interés continuo obtenemos que

$$\int_0^{+\infty} \psi_t(\omega) d\omega = e^{-rt}. \tag{1.9}$$

Como quiera que el activo paga ω euros en cada estado, su precio en el instante $t_0 = 0$ sería

$$P^0 = \int_0^{+\infty} \omega \psi_t(\omega) d\omega. \tag{1.10}$$

Empleando la misma lógica, el precio de un valor que pague $h(\omega)$ unidades en cada estado ω sería

$$\int_0^{+\infty} h(\omega) \psi_t(\omega) d\omega. \tag{1.11}$$

En particular, el precio de una opción Call europea sobre el activo subyacente con precio de ejercicio K y que expire en el instante t vendría dado por

$$CA^0_{t,K} = \int_0^{+\infty} \max\{\omega - K, 0\} \psi_t(\omega) d\omega = \int_K^{\infty} (\omega - K) \psi_t(\omega) d\omega. \tag{1.12}$$

OBSERVACIÓN:

En tanto en cuanto los factores de descuento $\psi_t(\cdot)$ dependen del activo subyacente, sólo podemos emplearlos para valorar pagos que dependan del precio de este activo.

1.3.2 Densidad de precios de estado

Dado que los precios de estado son positivos, podemos definir la variable aleatoria

$$f_t \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ f_t(\omega) = \frac{\psi_t(\omega)}{\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_t(\omega) d\omega}$$

Como $f_t \geq 0$ y $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_t(\omega) = 1$, f_t puede interpretarse como una función de densidad en Ω. Ahora bien, de la ecuación (1.9) tenemos que

$$f_t(\omega) = \frac{\psi_t(\omega)}{e^{-rt}}$$

La ecuación (1.10) puede escribirse ahora de la forma

$$e^{rt} P^0 = \int_0^{+\infty} \omega f_t(\omega) d\omega$$

o, equivalentemente,

$$\boxed{P^0 = e^{-rt} E_{f_t}[P^t]} \tag{1.13}$$

1.3.3 El proceso de precios del activo con riesgo

Hasta el momento, hemos investigado las condiciones que debe satisfacer ψ_t como factor de descuento estocástico. La existencia de estos factores es una consecuencia de la hipótesis de la ausencia de "free lunch". Estas condiciones, sin embargo, no determinan ψ_t. Hemos de imponer algunas hipótesis acerca del comportamiento de los precios del activo.

Despejando en la ecuación (1.13) llegamos a

$$e^{rt} = E_{f_t}\Big[\frac{P^t}{P^0}\Big]. \tag{1.14}$$

Substituyendo $P^t = P^0 + (P^t - P^0)$ tenemos

$$e^{rt} = 1 + E_{f_t}\Big[\frac{P^t - P^0}{P^0}\Big] \tag{1.15}$$

La variable $R^t = \dfrac{P^t - P^0}{P^0}$ es la rentabilidad del activo en el período $[0, t]$. Si omitimos la esperanza en la ecuación (1.14) podemos suponer que el término e^{rt} quede reemplazado por una variable aleatoria: el tipo de interés continuo del activo en el período $[0, t]$. Si denotamos esta variable por Y^t, tenemos pues

$$e^{Y^t} = 1 + R^t = \frac{P^t}{P^0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad P^t = P^0 e^{Y^t}. \tag{1.16}$$

La variable Y^t puede expresarse de la forma $Y^t = \mu_{Y^t} + \sigma_{Y^t} Z^t$, siendo Z^t una variable con la misma distribución que Y^t pero con media cero y varianza uno. En consecuencia,

$$e^{\mu_{Y^t} + \sigma_{Y^t} Z^t} = 1 + R^t. \tag{1.17}$$

HIPÓTESIS SOBRE Y^t

- Y^t está normalmente distribuida para todo t.
- Existen $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ tales que $\mu_{Y^t} = \mu t$ y $\operatorname{var} Y^t = \sigma^2 t$.
- Y^t depende de t sólo en la longitud del intervalo $[0, t]$.

El proceso Y^t así determinado se denomina un movimiento browniano.

En resumen,

$$\boxed{P^t = P^0 e^{\mu t + \sigma\sqrt{t}Z} = P^0 e^{\mu t} e^{\sigma\sqrt{t}Z}} \tag{1.18}$$

donde $Z \sim N(0, 1)$.

1.3.4 Determinación de una probabilidad neutral al riesgo

Si $Y^t \sim N(\mu t, \sigma\sqrt{t})$, la esperanza de la variable aleatoria e^{Y^t} viene dada por

$$E[e^{Y^t}] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 t}.$$

Ahora bien, por las ecuaciones (1.16) y (1.14), deducimos que, con respecto a la densidad neutral al riesgo f_t,

$$e^{rt} = E_{f_t}[e^{Y^t}].$$

Pero, si F_t y F_{Y^t} denotan respectivamente las funciones de distribución de P^t e Y^t, entonces

$$F_t(\omega) = F_{Y^t}\Big(\ln\Big(\frac{\omega}{P^0}\Big)\Big).$$

Luego, la relación entre las densidades neutrales al riesgo f_t y f_{Y^t} de P^t e Y^t es

$$f_t(\omega) = \frac{1}{\omega} f_{Y^t}\Big(\ln\Big(\frac{\omega}{P^0}\Big)\Big).$$

En definitiva, f_t verifica la ecuación (1.13) si y sólo si con respecto a la probabilidad neutral al riesgo f_{Y^t} de Y^t se tiene que

$$e^{rt} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{Y^t} f_{Y^t} dY^t. \tag{1.19}$$

Si suponemos que f_{Y^t} sigue una distribución normal a imagen y semejanza de la densidad respecto a la probabilidad "real" entonces

$$(\mu_{f_{Y^t}} + \frac{1}{2}\sigma^2_{f_{Y^t}})t = rt.$$

Si, además, suponemos que el valor $\sigma^2_{f_{Y^t}}$ coincide con el valor "real" σ^2 entonces

$$\mu_{f_{Y^t}} = \mu - \frac{\sigma^2}{2}.$$

Teorema 1.3.1 *Supongamos que respecto a la probabilidad original $Y^t \sim N(\mu t, \sigma\sqrt{t})$. Reemplazando μ por $r - \frac{1}{2}\sigma^2$ y manteniendo σ obtenemos una probabilidad neutral al riesgo. Respecto a esta probabilidad $Y^t \sim N((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma\sqrt{t})$.*

Teorema 1.3.2 *Si la distribución neutral al riesgo de Y^t es $Y^t \sim N((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma\sqrt{t})$ entonces la distribución de P^t es log-normal; esto es,*

$$f_t(\omega) = \frac{1}{\omega\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{\left(-\frac{\left(\ln(\omega) - \ln(P^0) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right)^2}{2\sigma^2 t}\right)} \tag{1.20}$$

1.3.5 La fórmula de Black-Scholes

Ya podemos calcular el valor de una opción Call europea sobre el activo subyacente a partir de las ecuaciones (1.12) y (1.20),

$$\begin{aligned} CA^0_{t,K} &= e^{-rt}\int_K^{\infty}(\omega - K)f_t(\omega)d\omega \\ &= \int_K^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{(\omega-K)e^{-rt}\sqrt{2}e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{(\ln(\omega)-\ln(P^0)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t)^2}{\sigma^2 t}\right)}}{\omega\sigma\sqrt{pit}}d\omega \end{aligned} \quad (1.21)$$

LA FÓRMULA DE BLACK-SCHOLES

$$\boxed{CA^0_{t,K} = N(d_1)P^0 - Ke^{-rt}N(d_2)} \quad (1.22)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{P^0}{K}) + t(r+\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{t}}$$
$$d_2 = \frac{\ln(\frac{P^0}{K}) + t(r-\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{t}}$$

y N es la función de distribución de una variable $N(0,1)$.

1.3.6 El teorema fundamental de la valoración de activos

Comenzaremos dando una idea de las dificultades técnicas que se presentan a la hora de extender el teorema fundamental de la valoración de activos a tiempo continuo. Recordemos el ejemplo de Back and Pliska (1991).

Imaginemos el fenómeno aleatorio consistente en lanzar repetidamente un dado hasta que salga el primer número distinto de 6. Podemos modelar este experimento mediante un espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ); tomando $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ la σ-álgebra de partes de Ω y $\mu(\omega) = \frac{5}{6}(\frac{1}{6})^{\omega-1}, \ \omega \in \Omega$. Naturalmente, cada $\omega \in \Omega$ representa el suceso: "El primer número distinto de 6 salió en la tirada ω".

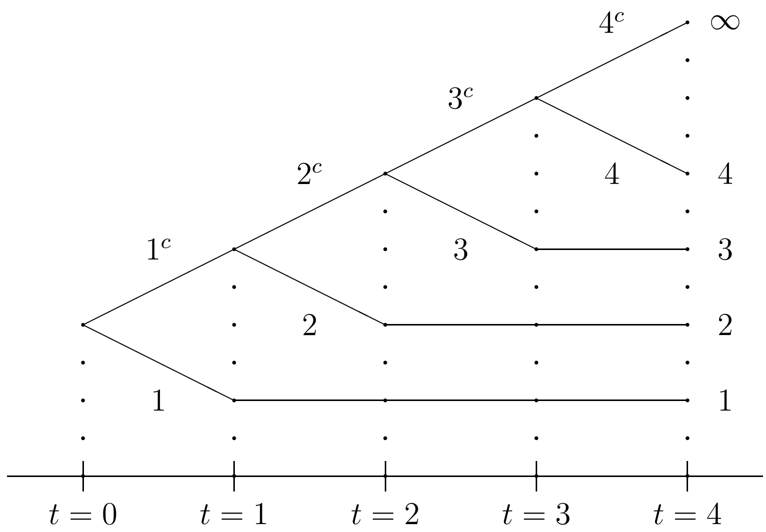


Figura 1.5: El ejemplo de Back y Pliska

Consideremos un mercado financiero en el que se negocian dos activos A_1 y A_2, en una cantidad infinita numerable de instantes $T = \mathbb{N}^*$. Supongamos que, en cada instante $t \in T$, se lanza un dado y que los inversores conocen si ha salido un número distinto de 6 en esa tirada o en alguna previa. Así, la información disponible en cada instante viene dada por la familia filtrante de σ-álgebras:

$$\Sigma_o = \{\emptyset, \Omega\}$$
$$\Sigma_t = \sigma(\{1, \ldots, t\}), \ t \in \mathbb{N},$$

siendo $\sigma(\{1, \ldots, t\})$ la σ-álgebra generada por los sucesos $\{1\}, \ldots, \{t\}$.

El activo A_1 es el "numerario", o sea, $P_1(t,\omega) = 1$ para todo $t \in T$ y todo $\omega \in \Omega$. Los precios del activo A_2 están dados por el siguiente proceso:

$$P_2^t(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^t & \text{si } 0 < t < \omega \\ (\omega^2 + 2\omega + 2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^\omega & \text{si } t \geq \omega \end{cases}$$

Así pues, el precio de A_2 se devalúa a la mitad en cada tirada mientras salga el número 6 de forma consecutiva; incrementa su valor a $(\omega^2 + 2\omega + 2)(\frac{1}{2})^\omega$ si sale un número distinto de 6 por primera vez en el instante ω; y, a partir de este momento, su precio es constante.

Back y Pliska demuestran que este mercado no admite arbitraje y que no es posible encontrar una medida martingala equivalente. Para ello, construyen un "free lunch" (una sucesión de estrategias que aproxima una de arbitraje), mediante lo que denominan estrategias de doblamiento. Se trata de comprar el activo A_2 en el instante inicial con el dinero obtenido por la venta al descubierto del "numerario". Si el salto de precios tiene lugar en el instante t_1 entonces habremos ganado dinero. En caso contrario, "doblamos la apuesta" comprando más cantidad de A_2 mediante la venta de la cantidad correspondiente de A_1. Procediendo indefinidamente de esta manera, obtendríamos una estrategia que nos proporcionaría pago positivo en cualquier estado de la naturaleza sin que hayamos invertido ningún dinero en el proceso. La existencia de este "free lunch" descarta la existencia de una medida martingala equivalente.

Capítulo 2

Optimalidad

Este capítulo está dedicado al problema de elegir la mejor estrategia de negociación con el fin de transformar la riqueza entre instantes de tiempo.

2.1 Modelos de período único

2.1.1 Carteras óptimas y viabilidad

Sea

$$\begin{aligned} U\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (c,\omega) &\rightsquigarrow U(c,\omega) \end{aligned}$$

una función de utilidad en $t = 1$. Así pues, c representa la riqueza final, ω el estado de la naturaleza y $U(c, \omega)$ la utilidad que le reporta al consumidor la cantidad c en $t = 1$ si se da ω.

Supondremos que $U(\cdot, \omega)$ es diferenciable, cóncava y estrictamente convexa para todo $\omega \in \Omega$.

Si un consumidor posee una dotación inicial $h_0 > 0$, consideremos el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & E[U(P^1 \cdot x)] \\ \text{sujeto a:} & \begin{cases} P^0 \cdot x = h_0 \\ x \in \mathbb{R}^{d+1} \end{cases} \end{array} \qquad (CO)$$

Observemos que:

$$\begin{aligned}
E[U(P^1 \cdot x)] &= \sum_{k=1}^{n} \mu_k U((P^1 \cdot x)(\omega_k)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mu_k U((P_0^1(\Delta \bar{P}^1 \cdot x)(\omega_k) + P^0 \cdot x)) \\
&= E[U(P_0^1(\Delta \bar{P}^1 \cdot x + P^0 \cdot x))]
\end{aligned}$$

Luego, si $x = (x_0, x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ es una cartera de precio h_0, denotando por $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ se tiene que

$$P^1 \cdot x = P_0^1(\bar{P}^1 \cdot x - P^0 \cdot x + P^0 \cdot x) = P_0^1(\Delta \bar{P}^1 \cdot \hat{x} + h_0)$$

Recíprocamente, dado $\hat{x} = (x_1, \cdot, x_d) \in \mathbb{R}^d$, existe una única cartera $x = (x_0, x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ de precio h_0 verificando la relación anterior. En consecuencia, el problema (CO) es equivalente a

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & E[U(P^1 \cdot x)] \\ \text{sujeto a:} & \left\{ \begin{array}{l} P^0 \cdot x = h_0 \\ x \in \mathbb{R}^{d+1} \end{array} \right. \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname*{Max}_{\hat{x} \in \mathbb{R}^d} E[U(P_0^1(h_0 + \Delta \bar{P}^1 \cdot \hat{x}))] \tag{2.1}$$

Proposición 2.1.1 *Si (CO) es resoluble entonces en el mercado no hay oportunidades de arbitraje.*

Resulta ciertamente sorprendente que exista una relación explícita entre cualquier solución óptima del problema (CO) y las m.m.e a μ. Denotemos por

$$F(\hat{x}) = E[U(P_0^1(h_0 + \Delta\bar{P}^1 \cdot \hat{x}))]$$

la función objetivo en (2.1) y sea $\hat{x}^* \in \mathbb{R}^d$ cualquier solución óptima. Por la condición necesaria de primer orden, para todo $j = 1, \ldots, d$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_j}(\hat{x}^*) &= \sum_{k=1}^{n} \mu_k U'\big((P^1 \cdot x^*)(\omega_k)\big) P_0^1(\omega_k)\big(\bar{P}_j^1(\omega_k) - P_j^0\big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu_k U'\big((P^1 \cdot x^*)(\omega_k)\big) P_0^1(\omega_k)\Big(\frac{P_j^1(\omega_k)}{P_0^1(\omega_k)} - P_j^0\Big) = 0. \qquad (2.2)\end{aligned}$$

Consideremos el vector $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ dado por:

$$q_k = \frac{\mu_k U'\big((P^1 \cdot x^*)(\omega_k)\big) P_0^1(\omega_k)}{E[P_0^1 U'(P^1 \cdot x^*)]}.$$

Claramente, $q_k > 0$ para todo $k = 1, \ldots, n$ y $\sum_{k=1}^n q_k = 1$, con lo que Q es una medida de probabilidad en Ω equivalente a μ. Pero además, la relación (2.2) es equivalente a $E_Q\left[\frac{P_j^1}{P_0^1} - P_j^0\right] = 0$ para todo $j = 1, \ldots, d$. Esto es, $Q \in \mathbb{M}$.

Proposición 2.1.2 *Si $\hat{x}^* \in \mathbb{R}^d$ es solución del problema (CO) entonces*

$$Q(\omega_k) = \frac{\mu_k U'\big((P^1 \cdot x^*)(\omega_k)\big) P_0^1(\omega_k)}{E[P_0^1 U'(P^1 \cdot x^*)]},\ k = 1, \ldots, n$$

es una m.m.e. a μ.

La función de densidad de precios de estado L puede expresarse del siguiente modo:

$$L_k = \frac{Q_k}{\mu_k} = \frac{P_0^1(\omega_k)}{E[P_0^1 U'(P^1 \cdot x^*)]} U'\big((P^1 \cdot x^*)(\omega_k)\big), \ k = 1, \dots, n \tag{2.3}$$

Corolario 2.1.3 *Si el tipo de interés r es determinista entonces*

$$L_k = \frac{Q_k}{\mu_k} = \frac{1}{E[U'(P^1 \cdot x^*)]} U'\big((P^1 \cdot x^*)(\omega_k)\big), \ k = 1, \dots, n,$$

es decir, la densidad de precios de estado es proporcional a la utilidad marginal de la riqueza final óptima.

Definición 2.1.4 *El modelo del mercado se dice viable si existen una función de utilidad U y una dotación inicial h_0 tales que el correspondiente problema (CO) es resoluble.*

Teorema 2.1.5 *El mercado es viable si y sólo si no hay oportunidades de arbitraje.*

De hecho, si $Q \in \mathbb{M}$, entonces dado h_0 arbitrario, una elección adecuada de U sería

$$U(c, \omega) = c \frac{Q(\omega)}{\mu_k P_0^1(\omega)}.$$

2.1.2 Carteras óptimas y probabilidades neutrales al riesgo

La función objetivo F del problema (2.1) puede verse como una composición:

$$\begin{array}{l} \mathbb{R}^d \longrightarrow \text{v. a.} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \hat{x} \rightsquigarrow P^1 \cdot x \rightsquigarrow E[U(P^1 \cdot x)] \end{array}$$

Resolveremos el problema (2.1) en dos etapas:
1ª Etapa: Identificaremos la variable aleatoria óptima V^* para $E[U(V)]$ en el conjunto de variables aleatorias factibles.
2ª Etapa: Calcularemos una cartera x^* que replique V^*.

ETAPA 1: (MERCADOS COMPLETOS)

Dado h_o sea

$$W_{h_0} = \{K \in \mathbb{R}^n : E_Q\left[\frac{K}{P_0^1}\right] = h_0\}$$

el subespacio afín de las riquezas alcanzables en $t = 1$.

Intentaremos resolver el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & E[U(K)] \\ \text{sujeto a:} & K \in W_{h_0} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{Max} & E[U(K)] \\ \text{sujeto a:} & E_Q[\frac{K}{P_0^1}] = h_0 \end{array}$$

que, si escribimos $y = (y_1, \ldots, y_n) = (K(\omega_1), \ldots, K(\omega_n))$, es a su vez equivalente a

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu_k U(y_k) \\ \text{sujeto a:} & \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu_k L_k \frac{y_k}{P_0^1(\omega_k)} = h_0 \\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \end{array}$$

La función lagrangiana asociada a este problema es

$$\mathcal{L}(y) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k U(y_k) - \lambda\Big(\sum_{k=1}^{n} \mu_k L_k \frac{y_k}{P_0^1(\omega_k)} - h_0\Big)$$

Por el teorema de los multiplicadores de Lagrange tenemos que si $y^* \in \mathbb{R}^n$ es una solución óptima del problema entonces

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_j}(y^*) = U'(y_j^*) - \lambda \frac{L_j}{P_0^1(\omega_j)} = 0, j = 1, \dots, n \tag{2.4}$$

Fijémonos en que esta ecuación coincide con (2.3) para $\lambda = \frac{1}{E[P_0^1 U'(y)]}$. Resolviendo (2.4) tenemos que

$$y_j^* = I\Big(\lambda \frac{L_j}{P_0^1(\omega_j)}\Big)$$

siendo I la inversa de U' y λ tal que

$$E_Q\Big[\frac{I\big(\lambda \frac{L}{P_0^1}\big)}{P_0^1}\Big] = h_0.$$

ETAPA 1: (MERCADOS INCOMPLETOS)

Recordemos que $\mathbb{M} = L^{\perp} \cap \mathbb{P}^{+}$. Supongamos que $\dim(L^{\perp}) = J$ (luego, $\dim(L) = n - J$) y elijamos una base $\{Q_1, \ldots, Q_J\}$ de $L^{\perp}$ formada por elementos de $\mathbb{M}$.

Dado h_o sea

$$W_{h_0} = \{K \in \mathbb{R}^n : E_{Q_j}\left[\frac{K}{P_0^1},\ j = 1, \ldots, J\right] = h_0\}$$

el subespacio afín de las riquezas alcanzables en $t = 1$.

Intentaremos resolver el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & E[U(K)] \\ \text{sujeto a:} & K \in W_{h_0} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{Max} & E[U(K)] \\ \text{sujeto a:} & E_{Q_j}[\frac{K}{P_0^1}] = h_0,\ j = 1, \ldots, n \end{array}$$

2.1.3 Problemas de consumo e inversión

Definición 2.1.6 *Un proceso de consumo es un par $C = (C_0, C_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tal que $C_0 \geq 0$ y $C_1 \geq 0$.*

Un plan de consumo e inversión es un par (C, x) donde:

1. *C es un proceso de consumo.*
2. *$x \in \mathbb{R}^{d+1}$ es una cartera de activos.*

Un plan (C, x) es admisible para h_0 si:

1. *$C_0 + P^0 \cdot x = h_0$*
2. *$P^1 \cdot x = C_1$*

Si (C, x) es un plan admisible entonces C_1 es un pago alcanzable y, por lo tanto,

$$P^0 \cdot x = E_Q\left[\frac{C_1}{P_0^1}\right], \text{ para todo } Q \in \mathbb{M}$$

Proposición 2.1.7 *Dados $h_0 \geq 0$ y $C = (C_0, C_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, existe una cartera $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ tal que el plan (C, x) es admisible si y sólo si*

$$C_0 + E_Q\left[\frac{C_1}{P_0^1}\right] = h_0, \text{ para todo } Q \in \mathbb{M}$$

Nos planteamos el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & U(C_0) + E[U(C_1)] \\ \text{sujeto a:} & \begin{cases} C_0 + P^0 \cdot x = h_0 \\ C_1 - P^1 \cdot x = 0 \\ C_0 \geq 0,\ C_1 \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^{d+1} \end{cases} \end{array} \qquad (C - I)$$

Despejando C_0 y C_1 en las restricciones y substituyendo en el objetivo llegamos al problema equivalente:

$$\underset{x \in \mathbb{R}^{d+1}}{\text{Max}}\ U(h_0 - P^0 \cdot x) + \sum_{k=1}^{n} \mu_k U((P^1 \cdot x)(\omega_k)).$$

La condición necesaria de primer orden sería:

$$-U'(C_0)P_j^0 + E[U'(C_1)P_j^1] = 0,\ j = 0, \dots, d \tag{2.5}$$

En particular:

$$U'(C_0) = E[U'(C_1)P_0^1].$$

Bajo condiciones adecuadas que garanticen que $C_0 \geq 0$ y $C_1 \geq 0$, una solución de (2.5) es solución del problema $(C - I)$.

Proposición 2.1.8 *Si (C^*, x^*) es una solución del problema $(C - I)$ con $C_0^* > 0$ y $C_1^*(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$ entonces*

$$Q(\omega) = \mu(\omega) P_0^1(\omega) \frac{U'(C_1(\omega))}{U'(C_0)},\ \omega \in \Omega$$

es una m.m.e. a μ.

La aproximación neutral al riesgo para resolver $(C-I)$ consiste en proceder en dos etapas:

1ª Etapa: Resolvemos,

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & U(C_0)+E[U(C_1)] \\ \text{sujeto a:} & \begin{cases} C_0+E_Q[\frac{C_1}{P_0^1}]=h_0 \\ C_0\geq 0,\ C_1\geq 0 \end{cases} \end{array}$$

2ª Etapa: Encontramos una cartera $x\in\mathbb{R}^{d+1}$ que replique la solución de la etapa anterior.

EXTENSIONES:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & U(C_0)+\beta E[U(C_1)] \\ \text{sujeto a:} & \begin{cases} C_0+P^0\cdot x=h_0 \\ C_1-P^1\cdot x=0 \\ C_0\geq 0,\ C_1\geq 0,\ x\in\mathbb{R}^{d+1} \end{cases} \end{array} \qquad 0<\beta\leq 1$$

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & U(C_0)+E[U(C_1)] \\ \text{sujeto a:} & \begin{cases} C_0+P^0\cdot x=h_0 \\ C_1-P^1\cdot x=E_1 \\ C_0\geq 0,\ C_1\geq 0,\ x\in\mathbb{R}^{d+1} \end{cases} \end{array} \qquad (h_0,E_1)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^n$$

2.1.4 Análisis media-varianza de carteras

En esta sección supondremos que el tipo de interés r es determinista, que no hay oportunidades de arbitraje en el mercado y que existe una cartera $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ tal que

$$\bar{R}_x = E[R_x] \neq r$$

Un problema clásico en este contexto es

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \operatorname{var}(R) \\ \text{sujeto a:} & \left\{ \begin{array}{l} E[R] = \rho \\ \rho \in \mathbb{R} \end{array} \right. \end{array} \qquad (MVP)$$

Si $\rho = r$ entonces la cartera $x^* = (1, 0, \ldots, 0)$ (el depósito bancario) es óptima, pues

$$R_{x^*} = (r, \ldots, r),\ E[R_{x^*}] = r\ y\ \operatorname{var}(R_{x^*}) = 0.$$

Recíprocamente, si x^* es tal que $\operatorname{var}(R_{x^*}) = 0$ entonces $R_{x^*} = (\rho, \ldots, \rho)$ y $\rho = E[R_{x^*}]$. Dado que no hay arbitraje, $\rho = r$.

Proposición 2.1.9 *El valor óptimo del problema (MVP) es cero si y sólo si $\rho = r$.*

Si $\rho \geq r$, el conjunto de soluciones factibles de (MVP) no es vacío y, por ello, este problema tiene solución.

Si denotamos por

$$F_j = \frac{P_j^0 x_j}{P^0 \cdot x},\ j = 1, \ldots, d$$

la rentabilidad de cualquier cartera $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ puede escribirse mediante:

$$R_x = (1 - F_1 - \cdots - F_d)r + \sum_{j=1}^{d} F_j R_j.$$

Así, el problema (MVP) admite la formulación equivalente:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & F\, \mathbb{C}\, F^t \\ \text{sujeto a:} & \left\{ \begin{array}{l} (1 - F_1 - \cdots - F_d)r + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} F_j \bar{R}_j = \rho \\ \\ F \in \mathbb{R}^d \end{array} \right. \end{array}$$

siendo $\mathbb{C} = (\operatorname{cov}(R_i, R_j)) \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

Resolveremos el problema clásico que hemos expuesto utilizando la teoría que venimos desarrollando. Consideremos el problema,

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \operatorname{var}(P^1 \cdot x) \\ \text{sujeto a:} & \begin{cases} E[P^1 \cdot x] = h_0(1+\rho) \\ P^0 \cdot x = h_0 \end{cases} \end{array} \qquad (MV - A)$$

Proposición 2.1.10 *La relación* $P^1 \cdot x = h_0(1 + R_x)$ *establece una correspondencia biunívoca entre los conjuntos de soluciones factibles de los problemas* (MVP) *y* $(MV - A)$.

Consideremos el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & E[-\frac{1}{2}(P^1 \cdot x)^2 + \beta P^1 \cdot x] \\ \text{sujeto a:} & \begin{cases} P^0 \cdot x = h_0 \\ x \in \mathbb{R}^{d+1},\ h_0 \geq 0 \end{cases} \end{array} \qquad (OC - A)$$

donde

$$\beta = \frac{h_0\big((1+\rho)E_q[L] - (1+r)\big)}{E_Q[L] - 1}.$$

Este problema es del tipo estudiado en las secciones precedentes, de modo que es fácil establecer el siguiente resultado:

Teorema 2.1.11 *Los problemas* $(MV - A)$ *y* $(OC - A)$ *son equivalentes.*

En otros términos, este resultado implica que hay una correspondencia biunívoca entre las soluciones del problema media-varianza de carteras y las soluciones de los problemas de un consumidor con utilidad cuadrática.

CONSECUENCIAS:

Teorema 2.1.12 *La solución óptima R^* del problema (MVP) es una función afín de la densidad de precios de estado L.*

Teorema 2.1.13 (C.A.P.M.) *Si R^* es la solución óptima del problema (MVP) para $\rho \geq r$ y R es la rentabilidad de cualquier cartera entonces*

$$E[R] - r = \frac{\operatorname{cov}(R, R^*)}{\operatorname{var}(R^*)}(E[R^*] - r).$$

Teorema 2.1.14 (Mutual fund principle) *Fijemos una cartera x^* cuya rentabilidad es solución del problema (MVP) para $\bar{\rho} \geq r$. Entonces la solución del problema (MVP) para cualquier otro $\rho \geq r$ se puede alcanzar mediante una cartera consistente en invertir en el activo sin riesgo y en la cartera fijada x^*.*

2.2 Modelos multiperíodo. Carteras óptimas y programación dinámica

Dada una estrategia $\theta = \{\theta_t\}_{t=1}^T$ definimos el **proceso de ganancias** $\{G_t(\theta)\}_{t=0}^T$ mediante:

$$G^t(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{t} \theta_r \Delta P^t & \text{si } t \in \{1, \dots, T\} \end{cases}.$$

Sabemos que $\theta \in \Theta$ es autofinanciada si y sólo si $G^t(\theta) = V^t(\theta) - V^0(\theta)$ para todo $t = 1, \dots, T$.

Dado un proceso predecible con valores en $\mathbb{R}^d$, $\hat{\theta} = \{\hat{\theta}^t\}_{t=1}^T$ con $\hat{\theta}^t = (\theta_1^t, \dots, \theta_d^t)$, existe un único proceso predecible con valores en $\mathbb{R}$, $\{\theta_0^t\}_{t=1}^T$, de tal forma que el proceso aumentado $\theta = \{(\theta_0^t, \hat{\theta}^t)\}_{t=1}^T$ es una estrategia autofinanciada con valor inicial $V^0(\theta) = 0$.

El problema de la cartera óptima en un modelo multiperíodo admite la formulación:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & E[U(V^T(\theta))] \\ \text{sujeto a:} & \begin{cases} V^0(\theta) = h_0 \\ \theta \in \Theta \end{cases} \end{array} \qquad (CO)$$

que es equivalente a:

$$\underset{\hat{\theta} \in \hat{\Theta}}{\text{Max}}\ E[h_0 + U(V^T(\hat{\theta}))]$$

Proposición 2.2.1 *Si θ^* es solución del problema (CO) entonces:*

$$Q(\omega) = \frac{\mu_k}{E\Big[U'(V^T(\theta))\Big]} U'(V^T(\theta)(\omega)),\ \omega \in \Omega$$

es una m.m.e. a μ.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

- Métodos clásicos de optimización.
- Programación dinámica.
- Métodos de martingala.

Programación dinámica

Definimos el proceso de valor óptimo

$$U_t(w) = \operatorname*{Max}_{\theta^* \in \Theta^*} E[w + U(V^T(\theta_t))],\ t = 0, \ldots, T$$

Claramente, $U_T(w) = u(w, \omega)$. Para $t < T$ el valor $U_t(w)$ verifica la ecuación funcional de la programación dinámica:

$$U_t(w) = \operatorname*{Max}_{\theta^{t+1} \in \mathcal{F}_t} E[U_{t+1}(w + \theta_{t+1} \Delta P^{t+1}) | \mathcal{F}_t].$$

Método de la martingala

En una primera etapa resolvemos el problema,

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & E[U(K)] \\ \text{sujeto a:} & K \in W_{h_0} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{Max} & E[U(K)] \\ \text{sujeto a:} & E_Q[\frac{K}{P_0^1}] = h_0 \end{array}$$

eligiendo adecuadamente el conjunto W_{h_0}.

En una segunda etapa, calculamos una réplica de la solución obtenida en el paso anterior.

Capítulo 3

Equilibrio

Hasta este momento el proceso de precios de los activos era parte de los datos de nuestro modelo. No obstante, es importante entender los precios de modo que los economistas han desarrollado y estudiado modelos en los que el proceso de precios es endógeno.

3.1 Equilibrio en un modelo de un período

Los datos de nuestro modelo son ahora:

- $T = \{0, 1\}$
- (Ω, Σ, μ) incertidumbre
- $d + 1$ activos de precios en $t = 1$ dados por P^1. Uno de los activos es un depósito bancario.
- I inversores.
- Para cada $i = 1, \ldots, I$, tenemos una función de utilidad diferenciable, cóncava y estrictamente creciente, y unas dotaciones (U_i, h_i, E_i).

Variables de nuestro modelo:

- Los precios de los activos con riesgo en $t = 0$, $P_1^0, \ldots, P_d^0$.
- Un proceso de consumo $C^i = (C_0^i, C_1^i)$ para cada inversor $i = 1, \ldots, I$.
- Una estrategia $x^i = (x_0^i, \ldots, x_d^i) \in \mathbb{R}^{d+1}$ para cada inversor $i = 1, \ldots, I$.

Definición 3.1.1 *La terna* $(\{P_j^0\}_{j=1}^d,\ \{C^i\}_{i=1}^I,\ \{x^i\}_{i=1}^I)$ *es un equilibrio si para cada inversor* $i = 1, \dots, n$ *el plan de consumo inversión* (C^i, x^i) *es óptimo, o sea,* (C^i, x^i) *es solución del problema*

$$\begin{array}{ll} \textit{Max} & U_i(C_0^i) + E[U_i(C_1^i)] \\ \textit{sujeto a:} & \begin{cases} C_0^i + P^0 \cdot x^i = h_i \\ C_1^i - P^1 \cdot x^i = E_i \\ x^i \in \mathbb{R}^{d+1} \end{cases} \end{array}$$

y, además, el mercado se cierra, esto es,

$$\sum_{i=1}^I x_j^i = 0, \textit{ para todo } j = 0, 1, \dots, d.$$

Naturalmente, si existe un equilibrio entonces en el mercado no hay oportunidades de arbitraje. Además, si somos capaces de encontrar el proceso de consumo del equilibrio todas las demás variables serían fáciles de deducir.

Desafortunadamente, los equilibrios no tienen porque existir.

Proposición 3.1.2 *Si el proceso de consumo* $C^i = (C_0^i, C_1^i)$*,* $i = 1, \dots, I$*, forma parte de un equilibrio entonces*

$$\sum_{i=1}^I C_0^i = \sum_{i=1}^I h_i \qquad y \qquad \sum_{i=1}^I C_1^i = \sum_{i=1}^I E_i \tag{3.1}$$

Una colección de procesos de consumo verificando las relaciones (3.1) se denomina <u>factible</u>.

Definición 3.1.3 *Una colección* $\{\hat{C}^i\}_{i=1}^I$ *de procesos de consumo se denomina Pareto eficiente si es factible y no existe ninguna otra colección* $\{C^i\}_{i=1}^I$ *de procesos de consumo factibles tales que*

$$U_i(C_0^i) + E[U_i(C_1^i)] \geq U_i(\hat{C}_0^i) + E[U_i(\hat{C}_1^i)],\ i = 1, \dots, I$$

siendo alguna de las desigualdades estricta.

Mediante un razonamiento basado en la ausencia de arbitraje se puede demostrar el siguiente resultado.

Proposición 3.1.4 *Si el mercado es completo y* $\{\hat{C}^i\}_{i=1}^I$ *es parte de un equilibrio entonces* $\{\hat{C}^i\}_{i=1}^I$ *es Pareto eficiente.*

Bibliografía

Back, K., Pliska, S. R., 1988. Valuation af contingent claims on a general state space. Working Paper 6, Office for the study of futures and options. University of Illinois at Chicago.

Back, K., Pliska, S. R., 1991. On the fundamental theorem of asset pricing with an infinite state space. Journal of Mathematical Economics 20, 1–18.

Balbás, A., Longareda, I. R., Lucia, J. J., 1999. How does financial theory apply to catastrophe-linked derivatives? an empirical test of several pricing models. The Journal of Risk and Insurance 66 (4), 551–582.

Balbás, A., Longareda, I. R., Pardo, Á., 2000. Integration and arbitrage in the spanish financial markets: An empirical approach. The Journal of Futures Markets 20, 100–200.

Balbás, A., Mirás, M., Muñoz-Bouzo, M. J., 1998. On the measurement of financial market integration. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales 92 (4), 337–348.

Balbás, A., Mirás, M., Muñoz-Bouzo, M. J., 2002. Projective system approach to the martingale characterization of the absence of arbitrage. Journal of Mathematical Economics 37 (4), 311–323.

Balbás, A., Muñoz-Bouzo, M. J., 1998. Measuring the degree of fulfillment of the law of one price. applications to financial markets integration. Investigaciones Económicas 22 (22), 153–177.

Baxter, M., Rennie, A., 1996. Financial calculus: An introduction to derivative pricing. Cambridge University Press, Cambridge.

Björk, T., 1998. Arbitrage theory in continuous time. Oxford University Press, Oxford, New York.

Black, F., Scholes, M., 1973. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy 81, 637–659.

Chamberlain, G., Rothschild, M., 1983. Arbitrage, factor structure and mean variance analysis in large assets. Econometrica 51, 1281–1304.

Chateauneuf, A., Kast, R., Lapied, A., 1996. Choquet pricing for financial markets with frictions. Mathematical Finance 6 (3), 323–330.

Chen, Z., Knez, P. J., 1995. Measurement of market integration and arbitrage. The Review of Financial Studies 88, 563–579.

Chriss, N. A., 1997. Black-Scholes and beyond. Option pricing models. McGraw-Hill, New York.

Copeland, T. E., Weston, J. F., 1988. Financial theory and corporate policy. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusets.

Cox, J., Ross, S., 1976. The valuation of options for alternative stochastic processes. Journal of Financial Economics 3, 145–166.

Cox, J., Ross, S., Rubinstein, M., 1979. Option pricing: A simplified approach. Journal of Financial Economics 7, 229–263.

Cvitanić, J., Schachermayer, W., Wang, H., 1991. Martingale and duality methods for utility maximization in an incomplete market. Finance and Stochastics 29 (3), 702–730.

Dalang, R. C., Morton, A., Willinger, W., 1990. Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models. Stochastics and Stochastic Reports 29, 185–201.

Davis, M., 2001. Mathematics of financial markets. In: Engquist, B., Schmid, W. (Eds.), Mathematics Unlimited-2001 and beyond. Springer-Verlag, Berlin, pp. 361–380.

Delbaen, F., Schachermayer, W., 1998. The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes. Mathematische Annalen 312 (2), 215–250.

Duffie, D., 1988. Security markets. Stochastic models. Academic Press, Inc., San Diego.

Duffie, D., 1996. Dynamic asset pricing theory. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Duffie, D., Huang, C., 1986. Multiperiod security markets with differential information. Journal of Mathematical Economics 15, 283–303.

Dybvig, P. H., Ross, S. A., 1987. Arbitrage. In: Milgate, E., , Newman (Eds.), The new Palgrave: A dictionary of Economics. Vol. 11. Macmillan, London, pp. 100–106.

Elliott, R. J., Kopp, P. E., 1999. Mathematics of financial markets. Springer-Verlag, New York.

Hansen, L., Richard, S., 1987. The role of conditioning information in deducing testable restrictions implied by dynamic asset pricing models. Econometrica 55, 587–613.

Harris, F. H., McInish, T. H., Shoesmith, G. L., Wood, R. A., 1995. Cointegration, error correction, and price discovery on informationally linked security markets. Journal of Financial and Quantitative Analysis 30 (4), 563–579.

Harrison, M., Kreps, D. M., 1979. Martingale and arbitrage in multiperiod security markets. Journal of Economic Theory 20, 381–408.

Harrison, M., Pliska, S. R., 1981. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. Stochastic Processes and Applications 11, 215–260.

Ingersoll, J. E. J., 1987. Theory of financial decision making. Rowman & Littlefield Publishers Inc., Maryland.

Jacod, J., Shiryaev, A.Ñ., 1998. Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case. Finance and Stochastics 22 (3), 259–273.

Jaschke, S. R., 1998. Arbitrage bounds for the term structure of interest rates. Finance and Stochastics 22 (1), 29–40.

Jouini, E., Kallal, H., 1995. Martingales and arbitrage in securities markets with transaction costs. Journal of Economic Theory 66, 178–197.

Jouini, E., Kallal, H., 1999. Viability and equilibrium in securities markets with frictions. Mathematical Finance 9 (3), 275–292.

Kabanov, Y. M., Kramkov, D. O., 1994. No-arbitrage and equivalent martingale measures: an elementary proof of the harrison-pliska theorem. Theory of Probability and its Applications 39, 523–526.

Kamara, A., Miller, T. W., 1995. Daily and intradaily tests of european put-call parity. Journal of Financial and Quantitative Analysis 30 (4), 519–541.

Karatzas, I., Lehoczky, J. P., Shreve, S. E., Xu, G.-L., 2001. Utility maximization in incomplete markets with random endowment. SIAM Journal of control and optimization 5, 259–272.

Karatzas, I., Shreve, S. E., 1991. Brownian motion and stochastic calculus. Springer-Verlag, New York.

Karatzas, I., Shreve, S. E., 1998. Methods of mathematical finance. Springer-Verlag, New York.

Kempf, A., Korn, O., 1998. Trading systems and market integration. Journal of Financial Intermediation 7, 220–239.

Kleidon, A., Whaley, R., 1992. One market? stocks, furures and options during october 1987. The Journal of Finance 83 (8), 851–877.

Kopp, P. E., 1984. Martingales and stochastic integrals. Cambridge University Press, Cambridge.

Kramkov, D. O., Schachermayer, W., 1997. The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets, University of Wien (preprint).

Lee, J., Nayar, N., 1993. A transactions data analysis of arbitrage between index options and index futures. The Journal of Futures Markets 13 (8), 889–902.

Mas-Colell, A., 1975. Existence of equilibria in economies with infinitely many commodities. Journal of Economic Theory 4, 514–540.

Meneu, V., Balbás, A., Pardo, Á., 1999. On the effectiveness of several market integration measures. An empirical analysis. Working Paper 99-35 (8), Universidad Carlos III de Madrid.

Merton, R. C., 1973. An intertemporal capital asset pricing model. Econometrica 41, 867–888.

Merton, R. C., 1990. Continuous-time finance. Blackwell Publishers, Inc., Cambridge, Massachusets.

Mirás, M., 2000. Medición de los niveles de eficiencia en los mercados de capitales. Aplicaciones a los mercados imperfectos y a la integración de mercados. Ph.D. thesis, Departamento de Matemáticas, Universidad de Vigo.

Musiela, M., Rutkowski, M., 1997. Martingale methods in financial modelling. Springer, Berlin.

Neftci, S.Ñ., 1996. Introduction to the mathematics of financial derivatives. Academic Press, San Diego.

Oksendal, B., 1998. Stochactic differential equations. An introduction with applications. Springer-Verlag, Berlin.

Osborne, M., 1964. Brownian motion in the stock market. Operations Research 7, 145–173.

Pham, H., Touzi, N., 1999. The fundamental theorem of asset pricing with cone constraints. Journal of Mathematical Economics 31, 265–279.

Pliska, S. R., 1997. Introduction to mathematical finance: Discrete time models. Blackwell, Malden, Massachusetts.

Prisman, E. Z., 1986. Valuation of risky assets in arbitrage free economies with frictions. The Journal of Finance 41, 545–556.

Prisman, E. Z., 2000. Pricing derivative securities. An interactive dynamic environment with Maple V and Matlab. Academic Press, Inc., San Diego.

Protopapadakis, A., Stoll, H., 1983. Spot and future prices and the law of one price. The Journal of Finance 55, 1431–1455.

Rogers, L. C. G., 1994. Equivalent martingale measures and no-arbitrage. Stochastics and Stochastic Reports 51, 41–49.

Schachermayer, W., 1992. A hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time. Insurance: Mathematics and Economics 11 (4), 249–257.

Schachermayer, W., 1994. Martingale measures for discrete-time processes with infinite horizon. Mathematical Finance 44 (1), 25–55.

Taqqu, M. S., Willinger, W., 1987. The analysis of finite security markets using martingales. Advances in Applied Probability 19, 1–25.

Watsham, T. J., Parramore, K., 1997. Quantitative methods in finance. Springer-Verlag, London.

Wilhelm, J. E. M., 1985. Arbitrage theory. Introductory lectures on arbitrage-based financial asset pricing. Springer-Verlag, Berlin.

Wilmott, P., 1998. Derivatives. The theory and practice of financial engineering. John Wiley and Sons, Inc., New York.