Matemáticas en Wall Street: la fórmula de Black-Scholes

Miguel Ángel Mirás Calvo*

> Me di cuenta definitivamente de la importancia de la fórmula de Black-Scholes al escuchar a esos negociadores de opciones hablar de modo rutinario de ecuaciones diferenciales y ecuaciones diferenciales estocásticas. ¿Quién hubiese podido imaginarse a esta gente hablando de esta manera?
>
> Robert C. Merton
> Premio Nobel de Economía en 1997

1 Introducción y objetivos

En los últimos años, los mercados financieros de capitales y derivados han experimentado un enorme auge, hasta el punto de convertirse en una de las industrias de mayor crecimiento y prosperidad. Este período de apogeo ha impulsado el estudio riguroso de estos mercados mediante modelos matemáticos. Uno de los problemas estrella en las finanzas modernas es el de valorar (poner precio) a los, cada vez más numerosos y sofisticados, productos financieros: futuros, derivados, opciones, swaps... La moderna teoría de la valoración de activos comienza con la publicación de la famosa fórmula de valoración de Black and Scholes (1973). Esta elegante fórmula ha cambiado para siempre la forma en la que, tanto los teóricos académicos como los profesionales de los mercados, entienden la valoración de derivados. Desde su presentación, ha sido estudiada, analizada y contrastada en los mercados reales de opciones y futuros de todo el mundo. De hecho, pocas teorías han sufrido y resistido una revisión empírica tan rigurosa. La teoría de Black-Scholes ha salido airosa de este escrutinio no sólo por su flexibilidad y grado de aplicación sino porque la mayor parte de las ideas de las modernas teorías de valoración ya se encuentran originalmente en ella. El modelo de Black-Scholes ha servido de base para numerosas generalizaciones y extensiones por parte de académicos y de profesionales de las finanzas. Sin

*Departamento de Matemáticas. Facultad de Economía. Universidade de Vigo. C/ Lagoas Marcosende s/n. 36200 Vigo. Pontevedra (Spain). mmiras@uvigo.es

duda, la espectacular expansión de los productos financieros derivados está intrínsecamente unida a este formidable modelo.

Este pequeño curso tiene dos objetivos. Por una parte, introducir los conceptos financieros y matemáticos necesarios para entender la fórmula de Black-Scholes y su significado. Por otra, discutir algunas de las profundas implicaciones y consecuencias que esta fórmula tiene en la moderna teoría de valoración de activos. Dividiremos el curso en varios apartados:

1. Herramientas matemáticas fundamentales
2. Conceptos financieros básicos
3. El movimiento Browniano de los precios
4. La fórmula de Black-Scholes
5. Comentarios y extensiones
6. Material bibliográfico e informático relacionado

A continuación, daremos un breve esquema del contenido de cada apartado. Naturalmente éste es meramente orientativo y de referencia. No olvidemos que nuestro propósito no es obtener una derivación formal de la fórmula sino entender el significado de sus términos, comprender las hipótesis ideales bajo las que funciona y conocer las matemáticas que la sustentan.

2 Herramientas matemáticas fundamentales

Una de las ventajas de la fórmula de valoración de Black-Scholes es que puede entenderse teniendo tan sólo unas ideas básicas de las matemáticas del interés compuesto y un conocimiento elemental de probabilidad.

Interés simple: V es el valor al cabo de un tiempo t de un depósito inicial P a una tasa de interés anual r.

$$\boxed{V = P(1+r)^t}$$

Interés compuesto: V es el valor al cabo de un tiempo t de un depósito inicial P a una tasa r de interés compuesto n veces al año.

$$\boxed{V = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}}$$

Interés continuo: V es el valor al cabo de un tiempo t de un depósito inicial P a una tasa de interés continuo anual r.

$$\boxed{V = Pe^{rt}}$$

Observemos que $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{r}{n})^{nt} = e^{rt}$.

Tasa anual continua de pago de un activo: r es la tasa anual continua de beneficio de un activo S cuyo precio es S_o en un instante t_o y S_t en un instante posterior t.

$$\boxed{r = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{S_t}{S_o}\right)}$$

Función de densidad de una variable aleatoria normal: f es la función de densidad de una variable aleatoria normal típica $N(0,1)$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

Función de distribución de una variable aleatoria normal: F es la función de distribución de una variable aleatoria normal típica $N(0,1)$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}$$

3 Conceptos financieros básicos

Introduciremos, en este apartado, los instrumentos financieros básicos que utilizaremos así como los principales supuestos económicos necesarios para obtener las fórmulas de valoración. Básicamente, un opción es un contrato que da a su poseedor el derecho (que no la obligación) de comprar o vender "algo" (llamado el subyacente) en un instante futuro (la fecha de expiración o ejercicio) a un precio estipulado (el precio de ejercicio). Nos centraremos en las opciones sobre acciones, que pueden ser de varios tipos:

1. Call: derecho de compra
2. Put: derecho de venta
3. Europeas: sólo pueden ejercerse en la fecha de expiración
4. Americanas: pueden ejercerse en cualquier instante durante la vida de la opción

Estos son los términos que deben especificarse en el contrato de una opción, tanto Call como Put, y que son relevantes para los modelos de valoración teóricos:

1. El subyacente (S): el tipo de activo que puede ser comprado o vendido. Su precio de mercado en un instante t se denotará por S_t
2. El tamaño del contrato: el número de acciones del subyacente reflejadas en el contrato
3. El precio de ejercicio (K): el precio al que el subyacente debe ser comprado si la opción se ejerce
4. La fecha del contrato: la fecha en la que se firma y paga el contrato
5. La fecha de expiración (T): la fecha en la que la opción expira
6. El tipo: europea o americana
7. La prima: el precio pagado por el contrato

Valor de una opción de compra (call) al expirar:

$$\boxed{C_T = \max\{S_T - K, 0\}}$$

Valor de una opción de venta (put) al expirar:

$$\boxed{P_T = \max\{K - S_T, 0\}}$$

La teoría de valoración de opciones no trata de buscar la prima de la opción sino su valor intrínseco, llamado "precio teórico". El principio económico esencial sobre el que se fundamenta la teoría de valoración de activos es el de la **ausencia de arbitraje**. En pocas palabras, la hipótesis de no arbitraje excluye la posibilidad de obtener beneficios sin riesgo. El razonamiento básico de la valoración por arbitraje es el siguiente: si dos inversiones que liquidan en el mismo instante y producen los mismos beneficios o pérdidas "en cualquier caso", entonces deben tener el mismo precio.

Paridad Put-Call:

$$\boxed{C_t - P_t = S_t - e^{-r(T-t)}K}$$

donde t es el instante actual y r el tipo de interés anual.

4 El movimiento Browniano de los precios

El modelo de movimiento Browniano geométrico describe la distribución de probabilidad de los precios futuros de un activo; en otras palabras, es un modelo matemático de la relación entre el precio actual de un activo y sus posibles precios futuros. El modelo de movimiento Browniano geométrico establece que los pagos futuros de un activo están normalmente distribuidos y que la desviación típica (volatilidad) de esta distribución puede estimarse con los datos del pasado.

Hipótesis: La tasa de pagos de un activo entre el momento actual y un breve instante futuro Δt está normalmente distribuida. La media de esta distribución es $\mu\Delta t$ y la desviación típica $\sigma\sqrt{\Delta t}$. Técnicamente, se supone que el proceso de precios S resuelve la ecuación diferencial estocástica:

$$\boxed{dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t; \; S_0 > 0}$$

Conclusión del modelo: Si un activo S con precio S_t en el instante t sigue un movimiento Browniano geométrico de media instantánea μ y desviación típica instantánea σ entonces la tasa de pago de S entre el instante t y cualquier otro momento T,

$$\boxed{Y = \frac{1}{T-t} \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)}$$

está normalmente distribuida con media $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)$ y desviación típica $\sigma\sqrt{T-t}$.

Probabilidad de que la tasa de pago Y sea mayor que un porcentaje dado α:

$$\boxed{Pr(|Y| \geq \alpha) = F\left(\frac{-\alpha - \mu + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right) + F\left(-\frac{\alpha - \mu + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)}$$

Probabilidad de que una opción Call expire en el dinero:

$$\boxed{Pr(S_T \geq K) = F\left(\frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (T-t)(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)}$$

5 La fórmula de Black-Scholes

La fórmula de Black-Scholes es una expresión que proporciona el valor teórico de una opción Call o Put europea a partir de los siguientes datos:

el tiempo hasta la fecha de expiración, el precio actual del subyacente, la tasa anual de interés, el precio de ejercicio de la opción y la volatilidad del subyacente. El principio básico para obtener la fórmula es construir una estrategia autofinanciada de cobertura contra el riesgo inherente a la opción en la fecha de ejercicio. El mecanismo de **cobertura dinámica** es el concepto más importante para comprender el método de Black-Scholes.

Fórmula de Black-Scholes para opciones Call y Put de tipo europeo:

$$\boxed{\begin{array}{l} C_t = F(d_1)S_t - e^{-r(T-t)}KF(d_2) \\ P_t = -F(-d_1)S_t + e^{-r(T-t)}KF(-d_2) \end{array}}$$

donde

$$\boxed{\begin{array}{l} d_1 = \dfrac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (T-t)(r+\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 = \dfrac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{array}}$$

6 Comentarios y extensiones

Dedicaremos este apartado ha reflexionar acerca de las hipótesis económicas que subyacen en la fórmula de Black-Scholes:

1. Ventas al descubierto y uso total de los beneficios
2. Liquidez
3. Tipos de interés constantes
4. Negociación continua
5. Costes de transacción
6. La hipótesis de no-arbitraje
7. El movimiento Browniano de los precios
8. La volatilidad

Citaremos algunas extensiones de la fórmula y distintos métodos para su obtención. Comentaremos como se pueden valorar otro tipo de opciones más "exóticas" en un modelo discreto: los árboles binomiales.

7 Material bibliográfico e informático relacionado

Lamentablemente, la bibliografía que yo manejo, incluso al nivel más elemental, está escrita en inglés. La referencia básica en la que me he apoyado es Chriss (1997), un excelente libro, ameno y didáctico, que introduce la fórmula de Black-Scholes desde "cero". Otro libro de iniciación, un poco más exigente, es Elliott and Kopp (1999). Para profundizar en aspectos concretos de la teoría, y por ello más específicos y más técnicos, pueden consultarse Oksendal (1998), Wilhelm (1985) o Duffie (1988). En cuanto a material informático, recomendar el CD que acompaña el libro de Prisman (2000) donde se anima al lector a entender la valoración de activos mediante prácticas y simulaciones que utilizan la potencia de cálculo y dibujo de Maple V y Matlab (no es necesario conocer estos programas de antemano).

Referencias

Black, F., Scholes, M., 1973. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy 81, 637–659.

Chriss, N. A., 1997. Black-Scholes and beyond. Option pricing models. McGraw-Hill, New York.

Duffie, D., 1988. Security Markets. Stochastic Models. Academic Press, Inc., San Diego.

Elliott, R. J., Kopp, P. E., 1999. Mathematics of Financial Markets. Springer-Verlag, New York.

Oksendal, B., 1998. Stochactic Differential Equations. An introduction with Applications. Springer-Verlag, Berlin.

Prisman, E. Z., 2000. Pricing derivative securities. An interactive dynamic environment with Maple V and Matlab. Academic Press, San Diego.

Wilhelm, J. E. M., 1985. Arbitrage Theory. Introductory Lectures on Arbitrage-Based Financial Asset Pricing. Springer-Verlag, Berlin.